

M.P.H. Wolff • P. Hauck • W. Küchlin

Mathematik für Informatik und BioInformatik



Springer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Überblick	1
1.1 Ziele und Entstehung des Buchs	1
1.2 Wozu dient die Mathematik in der Informatik?	3
1.3 Unsere mathematische Auswahl	10
2. Grundlagen	11
2.1 Einführung in das mathematische Argumentieren	11
2.2 Mengen	19
2.2.1 Einführung	19
2.2.2 Mengen und Mengenrelationen	21
2.2.3 Kartesisches Produkt und Abbildungen	22
2.2.4 Potenzmenge, Verallgemeinerung der Mengenoperationen	28
2.2.5 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen	30
2.2.6 Relationen	33
2.3 Natürliche Zahlen und Kombinatorik	38
2.3.1 Die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip	38
2.3.2 Einführung in die Kombinatorik	42
2.4 Einführung in die Graphentheorie	51
2.4.1 Begriffe und einfache Ergebnisse	51
2.4.2 Eulersche Graphen	56
2.4.3 Bäume	58
2.5 Formale Aussagenlogik	61
2.5.1 Aufbau der Sprache	61

XII Inhaltsverzeichnis

2.5.2	Semantik von Ausdrücken	63
2.5.3	Aussagenlogische Äquivalenz	65
2.5.4	Logische Folgerung	67
2.5.5	Der Resolutionskalkül	68
3.	Einführung in die elementare Zahlentheorie	73
3.1	Teilbarkeit und Kongruenzen	73
3.2	Primfaktorzerlegung	84
4.	Einführung in die Algebra	87
4.1	Halbgruppen, Monoide und Gruppen	88
4.1.1	Halbgruppen	89
4.1.2	Monoide	94
4.1.3	Gruppen	95
4.1.4	Die Gruppenordnung und der Satz von Lagrange	97
4.1.5	Faktorgruppen und Homomorphismen	98
4.1.6	Zyklische Gruppen	101
4.1.7	Direktes Produkt von Monoiden und Gruppen	103
4.2	Ringe und Körper	105
4.2.1	Grundbegriffe	105
4.2.2	Polynomringe	108
4.2.3	Homomorphismen und Unterringe	111
4.2.4	Faktoringe und Ideale	114
4.2.5	Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_n$	119
4.3	Teilbarkeitslehre in Polynomringen	123
4.3.1	Teilbarkeit in kommutativen Ringen	123
4.3.2	Teilbarkeit in Polynomringen	124
4.3.3	Ein Repräsentantensystem für $K[x]/fK[x]$	126
4.3.4	Größter gemeinsamer Teiler in Polynomringen	127
4.3.5	Primelemente in Ringen	129
4.3.6	Primfaktorzerlegung in Polynomringen	131

4.4	Erste Anwendungen	132
4.4.1	Codes	132
4.4.2	Codierung mit Polynomen	133
4.4.3	Zyklische Codes	134
4.4.4	Ein öffentliches Verschlüsselungsverfahren	136
4.5	Boolesche Algebren	139
4.5.1	Definition und einfache Eigenschaften Boolescher Algebren	139
4.5.2	Die Boolesche Algebra der Aussagenlogik	142
4.5.3	Darstellung endlicher Boolescher Algebren	143
4.5.4	n-stellige Boolesche Funktionen und Polynomfunktionen ...	146
5.	Elementare Grundlagen der Analysis	149
5.1	Der Körper der reellen Zahlen	149
5.1.1	Die Ordnung auf $\mathbb{R}$	149
5.1.2	Das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$	152
5.1.3	Axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$	155
5.1.4	Obere und untere Grenze von Mengen	156
5.2	Der Körper der komplexen Zahlen	158
5.3	Folgen und Konvergenz	161
5.3.1	Typen von Folgen, Konvergenz	162
5.3.2	Monotone Folgen	165
5.3.3	Rechenregeln für konvergente Folgen	167
5.3.4	Groß O und klein o von Folgen	168
5.3.5	Teilfolgen einer Folge	170
5.3.6	Cauchys Konvergenzkriterium	171
5.4	Unendliche Reihen	172
5.4.1	Allgemeine unendliche Reihen	173
5.4.2	Absolut konvergente Reihen	174
5.4.3	Potenzreihen	177
5.5	Komplexe Zahlenfolgen und Reihen	179

6. Reelle Funktionen einer Veränderlichen	183
6.1 Reelle Funktionen und ihre Erzeugung	183
6.1.1 Einfache Regeln zur Bildung von Funktionen	183
6.1.2 Punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz	186
6.2 Grenzwert von Funktionswerten	191
6.3 Stetigkeit	198
6.3.1 Der Begriff Stetigkeit und Nachweis der Stetigkeit	198
6.3.2 Eigenschaften stetiger Funktionen	201
6.3.3 Exponentialfunktion und Logarithmus	204
7. Differential- und Integralrechnung	205
7.1 Die Ableitung (Differentiation) einer Funktion	205
7.1.1 Die grundlegende Idee der Ableitung	205
7.1.2 Einfache Ableitungsregeln	208
7.1.3 Höhere Ableitungen	210
7.2 Das bestimmte Integral	212
7.2.1 Das Integral von Treppenfunktionen	212
7.2.2 Das Integral von Regelfunktionen	215
7.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	220
7.3.1 Stammfunktion und Ableitung	220
7.3.2 Vertauschung von Differentiation und Konvergenz	222
7.4 Ableitungs- und Integrationsformeln	225
7.4.1 Einige elementare Ableitungsformeln	225
7.4.2 Die Winkelfunktionen	226
7.4.3 Die Hyperbelfunktionen	227
7.4.4 Tabelle der Ableitungs- und Integrationsformeln	228
7.4.5 Integrationstechniken	230
7.4.6 Differentiation und Integration komplexwertiger Funktionen	233
7.5 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung	234
7.5.1 Der Satz von Rolle	234

7.5.2	Die Mittelwertsätze	235
7.6	Grenzwertbestimmungen	238
7.7	Der Entwicklungssatz von Taylor	240
7.7.1	Der allgemeine Entwicklungssatz	240
7.7.2	Lokale Extremwerte	242
7.7.3	Die Taylorreihe	243
7.8	Integrale über offene und halboffene Intervalle	245
8.	Anwendungen	249
8.1	Periodische Funktionen und Fourierreihen	249
8.1.1	Periodische Funktionen und Fourierreihen	249
8.2	Fouriertransformation	256
8.3	Skalare gewöhnliche Differentialgleichungen	261
8.3.1	Evolutionsgleichungen	261
8.3.2	Die lineare Schwingungsgleichung	264
9.	Vektorräume	267
9.1	Vektorräume	268
9.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension	278
9.2.1	Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit	278
9.2.2	Basis und Dimension	281
9.2.3	Dimension von Unterräumen	286
9.2.4	Endliche Körper	287
9.3	Vektorräume mit Skalarprodukt	289
9.3.1	Euklidische Vektorräume	289
9.3.2	Norm und Abstand	293
9.3.3	Winkel und Orthogonalität	295
9.3.4	Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$	299
9.3.5	Skalarprodukte auf Vektorräumen über $\mathbb{C}$	301
9.4	Lineare Codes	303

10. Lineare Abbildungen und Matrizen	307
10.1 Lineare Abbildungen	307
10.2 Matrizen	314
10.2.1 Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung	314
10.2.2 Summen und skalare Vielfache von Matrizen	318
10.2.3 Hintereinanderausführung linearer Abbildungen und Produkt von Matrizen	319
10.2.4 Lineare Abbildungen und Koordinatenvektoren	323
10.2.5 Matrizen und Basiswechsel	324
10.2.6 Rang einer Matrix	327
10.3 Eine Anwendung: Diskrete Fouriertransformation	332
10.4 Determinanten	335
10.5 Eigenwerte linearer Abbildungen	345
10.6 Abbildungen auf Euklidischen Vektorräumen	352
10.6.1 Orthogonale Abbildungen	352
10.6.2 Vektorraum-basierte Informationssuche	357
10.6.3 Symmetrische Abbildungen und Matrizen	359
11. Lineare Gleichungssysteme und lineare Rekursionen	365
11.1 Lineare Gleichungssysteme	365
11.1.1 Allgemeine Theorie	365
11.1.2 Der Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme	370
11.1.3 Berechnung der Inversen einer invertierbaren Matrix	374
11.2 Lineare Rekursionen	376
12. Affine Geometrie	385
12.1 Affine Räume	385
12.1.1 Allgemeine affine Räume	385
12.1.2 Der affine Raum $A(V)$	387
12.1.3 Euklidische affine Räume	392

12.1.4 Geometrische Anwendungen in $A(\mathbb{R}^2)$ und $A(\mathbb{R}^3)$	393
12.2 Affine Abbildungen	395
12.2.1 Eigenschaften affiner Abbildungen	395
12.2.2 Kongruenzabbildungen auf Euklidischen affinen Räumen . .	399
13. Funktionen mehrerer Veränderlicher	403
13.1 Folgen in $\mathbb{R}^p$ und Folgen von Matrizen	403
13.1.1 Vektor- und Matrixnormen	404
13.1.2 Folgen von Vektoren und Matrizen	407
13.1.3 Spezielle Klassen von Mengen	411
13.2 Grenzwerte von Funktionswerten, Stetigkeit	413
13.2.1 Typen von Funktionen	413
13.2.2 Grenzwerte	415
13.2.3 Stetigkeit	417
13.3 Anwendungen in der Numerik	420
13.3.1 Der Fixpunktsatz von Banach	421
13.3.2 Interpolation	426
14. Mehrdimensionale Differentialrechnung	431
14.1 Kurven im $\mathbb{R}^p$	431
14.2 Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen	433
14.2.1 Partielle Ableitungen	433
14.2.2 Totale Ableitung	436
14.3 Der Satz von Taylor, Extremwertbestimmungen	439
14.4 Der Umkehrsatz und seine Anwendungen	442
14.4.1 Der Umkehrsatz	442
14.4.2 Implizite Funktionen	444
14.4.3 Extrema unter Nebenbedingungen	446

15. Mehrdimensionale Integration	449
15.1 Das mehrdimensionale Integral über kompakte Mengen	449
15.1.1 Definition des Integrals	449
15.1.2 Transformation von Integralen	452
15.2 Integrale über $\mathbb{R}^p$	454
16. Einführung in die Stochastik	455
16.1 Einleitung	455
16.1.1 Drei Probleme aus der Informatik	457
16.2 Wahrscheinlichkeitsräume	462
16.3 Zufallsvariablen	469
16.3.1 Einführung	469
16.3.2 Verteilung einer Zufallsvariablen	471
16.3.3 Die wichtigsten diskreten Verteilungen	472
16.3.4 Die wichtigsten stetigen Verteilungen	473
16.3.5 Definition von Erwartungswert und Varianz	477
16.3.6 Berechnung von Erwartungswert und Varianz	479
16.3.7 Verteilungen mit stetiger Dichte	480
16.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	481
16.4.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	482
16.4.2 Unabhängigkeit	484
16.5 Grenzwertsätze	487
16.5.1 Das Gesetz der großen Zahl	487
16.5.2 Zentraler Grenzwertsatz	489
16.5.3 Verteilung seltener Ereignisse	490
16.6 Stochastische Prozesse	492
16.6.1 Einleitung	492
16.6.2 Der Poisson-Prozess	492
16.6.3 Markoff-Ketten	494
Literaturverzeichnis	503
Index	505