

Michael Bestehorn

Hydrodynamik und Strukturbildung

Mit einer kurzen Einführung
in die Kontinuumsmechanik

Mit einem Geleitwort von Friedrich H. Busse

Mit 186 Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einführung | 1 |
| 2 | Kinematische Beschreibung der Kontinua | 11 |
| 2.1 | Kontinuierlicher Index | 11 |
| 2.2 | Euler- und Lagrange-Bild | 12 |
| 2.3 | Materialableitung | 13 |
| 2.4 | Verschiebungsfeld | 15 |
| 2.5 | Distorsions-, Dehnungs- und Drehtensor | 17 |
| 2.5.1 | Dehnungen | 19 |
| 2.5.2 | (*) Relative Volumenänderung und Kontinuitätsgleichung | 22 |
| 2.5.3 | Zerlegung in Dehnungs- und Drehtensor | 23 |
| 3 | Kräfte, Verformungen und Spannungen | 25 |
| 3.1 | Gleichgewicht und äußere Kräfte | 25 |
| 3.2 | Spannungen und Spannungsvektor | 26 |
| 3.3 | Der Spannungstensor | 27 |
| 3.3.1 | Bedeutung der Komponenten | 27 |
| 3.3.2 | Symmetrie des Spannungstensors | 28 |
| 3.4 | Spannungen und Kräfte | 29 |
| 3.5 | Das Materialgesetz | 30 |
| 3.6 | Aufspaltungen des Dehnungstensors | 31 |
| 3.6.1 | Kompression und Scherung | 31 |
| 3.6.2 | Lamé-Konstanten | 33 |
| 3.6.3 | (*) Young-Modul und Poisson-Zahl | 33 |
| 4 | Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik | 37 |
| 4.1 | Elastostatik | 37 |
| 4.2 | (*) Fundamentallösung | 38 |
| 4.2.1 | Zwei Beispiele singularer Kraftfelder | 40 |
| 4.3 | Elastodynamik | 42 |
| 4.4 | Wellen | 43 |
| 4.4.1 | Wellengleichungen | 43 |
| 4.4.2 | Lösungen der Wellengleichung | 44 |
| 4.4.3 | Reine Kompressionswellen | 48 |
| 4.4.4 | Longitudinale und transversale Wellen | 49 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5 | Ideale Flüssigkeiten | 51 |
| 5.1 | Euler-Gleichungen | 51 |
| 5.2 | Kontinuitätsgleichung | 53 |
| 5.2.1 | Kompressible Flüssigkeiten | 53 |
| 5.2.2 | Inkompressible Flüssigkeiten | 53 |
| 5.3 | (*) Erhaltungsgleichungen | 55 |
| 5.3.1 | Globale und lokale Erhaltungsgleichungen | 55 |
| 5.3.2 | Impulsstrom | 56 |
| 5.4 | Materialgesetze und Zustandsgleichungen | 57 |
| 5.5 | Randbedingungen | 61 |
| 5.5.1 | Fester Rand und Stromlinien | 61 |
| 5.5.2 | Freie Oberflächen | 62 |
| 5.6 | Hydrostatik | 65 |
| 5.6.1 | Grundgleichungen | 65 |
| 5.6.2 | Barometrische Höhenformel | 66 |
| 5.6.3 | (*) Reales Gas im konstanten Schwerfeld | 67 |
| 5.6.4 | Oberflächengestalt einer rotierenden inkompressiblen Flüssigkeit | 68 |
| 5.6.5 | Oberflächengestalt unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung | 69 |
| 5.6.6 | Tropfenbildung und Kontaktwinkel | 70 |
| 5.7 | Stationäre Strömungen | 71 |
| 5.7.1 | Euler-Gleichungen für eine stationäre Strömung | 71 |
| 5.7.2 | Ebene, inkompressible Strömung, Stromfunktion | 72 |
| 5.7.3 | Potentialströmung | 76 |
| 5.8 | Ebene Potentialströmung | 78 |
| 5.8.1 | Erhaltung des Wirbelfeldes | 78 |
| 5.8.2 | Stromfunktion und Potential | 79 |
| 5.8.3 | Der umströmte Zylinder | 80 |
| 5.8.4 | Komplexe Funktionentheorie | 84 |
| 5.8.5 | (*) Konforme Abbildungen | 90 |
| 5.8.6 | Die Auftriebsformel von Kutta und Joukowsky | 94 |
| 5.8.7 | (*) Der umströmte Tragflügel | 98 |
| 6 | Oberflächenwellen | 103 |
| 6.1 | Grundgleichungen und Randbedingungen | 103 |
| 6.2 | Schwerewellen | 104 |
| 6.2.1 | Grundgleichungen | 105 |
| 6.2.2 | Dispersionsrelation | 106 |
| 6.2.3 | Oberflächenprofil und Potential | 107 |
| 6.2.4 | Teilchenbahnen | 107 |
| 6.2.5 | Stromlinien | 112 |
| 6.3 | Wellen mit endlicher Amplitude – Stokes-Wellen | 113 |
| 6.3.1 | Aufteilung und Wellenbrechung | 114 |
| 6.3.2 | Dispersion | 115 |
| 6.3.3 | Stokes-Wellen | 116 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.4 | Flachwassergleichungen | 123 |
| 6.4.1 | Reduzierte Gleichungen | 123 |
| 6.4.2 | Lange Wellen – Skalierung und Kleinheitsparameter | 123 |
| 6.4.3 | Iterative Lösung der Laplace-Gleichung | 124 |
| 6.4.4 | Die Flachwassergleichungen | 125 |
| 6.4.5 | Dispersionsrelation | 126 |
| 6.4.6 | Numerische Lösungen | 126 |
| 6.4.7 | Lange Wellen über variablem, zeitlich konstantem Grund | 129 |
| 6.4.8 | Lineare Wellengleichung mit ortsabhängiger Phasengeschwindigkeit | 132 |
| 6.4.9 | Wellenerzeugung durch einen zeitlich variablen Grund | 139 |
| 6.4.10 | Tsunamis | 142 |
| 6.5 | Solitonen | 147 |
| 6.5.1 | Die Entdeckung von John Scott Russell | 148 |
| 6.5.2 | Die Korteweg – de Vries – Gleichung | 149 |
| 6.5.3 | Lösungen der KdV-Gleichung – homokline Orbits | 152 |
| 6.5.4 | Wechselwirkung zweier Solitonen | 156 |
| 6.5.5 | Definition des Solitons | 157 |
| 6.5.6 | Die Sine-Gordon-Gleichung – heterokline Orbits | 157 |
| 6.6 | Kapillarwellen | 161 |
| 6.6.1 | Dispersionsrelation | 162 |
| 6.6.2 | Solitonen und Antisolitonen | 164 |
| 7 | Viskose Flüssigkeiten | 167 |
| 7.1 | Die Navier-Stokes-Gleichungen | 168 |
| 7.1.1 | Der zähe Spannungstensor | 168 |
| 7.1.2 | Navier-Stokes-Gleichungen | 172 |
| 7.1.3 | Randbedingungen | 173 |
| 7.2 | Anwendungen | 177 |
| 7.2.1 | Dissipation der Energie | 177 |
| 7.2.2 | Rohrströmung | 179 |
| 7.2.3 | (*) Strömung zwischen zwei rotierenden, konzentrischen Zylindern | 182 |
| 7.2.4 | (*) Dämpfung einer Potentialströmung durch Reibung | 185 |
| 7.3 | Das Ähnlichkeitsgesetz | 186 |
| 7.3.1 | Skalierung und Reynolds-Zahl | 187 |
| 7.3.2 | Grenzfälle kleiner und großer Reynolds-Zahl | 188 |
| 7.4 | Grenzschichten | 195 |
| 7.4.1 | Wirbelsätze und Wirbeltransport | 195 |
| 7.4.2 | Skalierung und Dicke der Grenzschicht | 195 |
| 7.4.3 | Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen | 197 |
| 7.4.4 | Ablösung der Grenzschicht | 202 |
| 7.5 | Nicht-Newton'sche Flüssigkeiten | 205 |
| 7.5.1 | Klassifizierung | 205 |
| 7.5.2 | Zeitunabhängige Flüssigkeiten | 206 |
| 7.5.3 | Viskoelastische Flüssigkeiten | 210 |
| 7.5.4 | Verallgemeinerte lineare Maxwell-Flüssigkeiten | 212 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 8 | Hydrodynamische Instabilitäten | 221 |
| 8.1 | Strukturbildung | 222 |
| 8.1.1 | Instabilitäten | 223 |
| 8.1.2 | Periodische Strukturen im Ort | 224 |
| 8.1.3 | Periodische Strukturen in der Zeit | 227 |
| 8.1.4 | (*) Kodimension Zwei | 228 |
| 8.1.5 | Wellen | 230 |
| 8.2 | Taylor-Wirbel | 230 |
| 8.2.1 | Das lineare Problem | 231 |
| 8.2.2 | Eine Näherungslösung des linearen Problems | 233 |
| 8.3 | Konvektion | 235 |
| 8.3.1 | Strukturen und Instabilitätsmechanismus | 236 |
| 8.3.2 | Die Grundgleichungen der Konvektion | 238 |
| 8.3.3 | Lineares Problem | 240 |
| 8.3.4 | (*) Das lineare Problem für freie Randbedingungen | 241 |
| 8.3.5 | (*) Vollständig nichtlineare Gleichungen – numerische Lösungen | 245 |
| 8.3.6 | Bénard-Marangoni-Konvektion | 250 |
| 8.4 | Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität | 256 |
| 8.4.1 | Ein Mechanismus zur Wellenerzeugung | 256 |
| 8.4.2 | Die Grundgleichungen | 258 |
| 8.4.3 | Lineare Stabilitätsanalyse | 259 |
| 8.4.4 | (*) Flachwassergleichungen | 264 |
| 8.5 | Die Faraday-Instabilität | 269 |
| 8.5.1 | Grundgleichungen und lineares Problem | 269 |
| 8.5.2 | (*) Die Mathieu-Gleichung | 271 |
| 8.5.3 | Numerische Lösungen der Flachwasser-Gleichungen | 275 |
| 8.6 | Dünne viskose Filme | 275 |
| 8.6.1 | Die Grundgleichungen in der Schmiermittelnäherung | 276 |
| 8.6.2 | Laplace-Druck und Gravitation | 279 |
| 8.6.3 | Variationsprinzip und freie Energie | 281 |
| 8.6.4 | Der Trennungsdruck | 284 |
| 8.6.5 | Spinodale Entnetzung | 287 |
| 8.6.6 | Numerische Lösungen | 289 |
| 8.6.7 | (*) Verdampfung und Kondensation | 292 |
| 9 | Modellgleichungen der Strukturbildung | 303 |
| 9.1 | Strukturbildung in der Nähe der Schwelle | 303 |
| 9.1.1 | Ein Beispiel | 303 |
| 9.1.2 | Klassifizierung | 306 |
| 9.2 | Typ H_M : Die reelle Ginzburg-Landau-Gleichung | 309 |
| 9.2.1 | Ginzburg-Landau-Gleichung, Normalform | 310 |
| 9.2.2 | Freie Energie und Gradientendynamik | 311 |
| 9.2.3 | Numerische Lösung, Interpretation der Strukturen | 312 |
| 9.3 | Typ H_O : Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung | 313 |
| 9.3.1 | Normalform und homogene Lösung | 313 |
| 9.3.2 | Methode der Phasengleichungen | 314 |
| 9.3.3 | Die Benjamin-Feir-Instabilität | 315 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9.4 | Typ T_M : Die Swift-Hohenberg-Gleichung | 317 |
| 9.4.1 | Instabile und stabile Moden | 317 |
| 9.4.2 | Endliche Bandbreiten | 319 |
| 9.4.3 | Numerische Lösungen, Streifen | 322 |
| 9.4.4 | Kompliziertere Nichtlinearitäten und Versklavung | 322 |
| 9.4.5 | Streifen, Hexagone und Quadrate | 326 |
| 9.4.6 | Typ T_O : Die komplexe Swift-Hohenberg-Gleichung | 333 |
| 9.5 | Typ KO_M : Die Cahn-Hilliard-Gleichung | 336 |
| 9.5.1 | Phasenfeldmodelle | 336 |
| 9.5.2 | Extremalprinzip | 336 |
| 9.5.3 | Gradientendynamik | 337 |
| 9.5.4 | Cahn-Hilliard-Gleichung | 338 |
| 9.5.5 | Coarsening | 341 |
| 9.5.6 | Die erweiterte Cahn-Hilliard-Gleichung | 342 |
| 9.5.7 | Andere KO_M -Normalformen | 344 |
| 10 | Numerische Näherungsverfahren | 345 |
| 10.1 | Partielle Differentialgleichungen | 345 |
| 10.1.1 | Galerkin-Verfahren | 346 |
| 10.1.2 | Finite Differenzen | 347 |
| 10.1.3 | Quasilineare Gleichungen | 350 |
| 10.1.4 | Zeititeration | 351 |
| 10.1.5 | Neumann'sche Stabilitätsanalyse | 353 |
| 10.1.6 | Pseudo-Spektral-Methode | 355 |
| 10.1.7 | Mehrschrittverfahren | 357 |
| 10.1.8 | Randbedingungen | 360 |
| 10.2 | Orthogonale Polynome im Intervall $[0,1]$ | 360 |
| 10.2.1 | Dirichlet-Randbedingungen | 361 |
| 10.2.2 | Orthogonale Polynome, „no-slip“-Bedingungen | 362 |
| 10.2.3 | Jacobi-Polynome | 364 |
| A | Funktionale | 367 |
| A.1 | Die Funktionalableitung | 367 |
| A.2 | Beispiele | 368 |
| A.3 | Euler-Lagrange-Gleichung | 369 |
| B | Formelsammlung | 371 |
| B.1 | Vektorrechnung | 371 |
| B.2 | Vektoranalysis | 372 |
| B.3 | Integralsätze | 373 |
| B.3.1 | Volumen- und Oberflächenintegrale | 373 |
| B.3.2 | Flächen- und Linienintegrale | 374 |
| B.4 | Differentialoperatoren | 374 |
| B.4.1 | Bezeichnungen | 374 |
| B.4.2 | Gradient | 376 |
| B.4.3 | Divergenz | 377 |

XIV Inhaltsverzeichnis

| | | |
|------------------|--|------------|
| B.4.4 | Rotation | 378 |
| B.4.5 | Laplace | 378 |
| B.5 | Die Grundgleichungen in krummlinigen Koordinaten | 379 |
| B.5.1 | Kartesische Koordinaten | 379 |
| B.5.2 | Zylinderkoordinaten | 380 |
| B.5.3 | Kugelkoordinaten | 381 |
| Literatur | | 383 |
| Index | | 387 |