

Michael Bestehorn

Hydrodynamik und Strukturbildung

Mit einer kurzen Einführung
in die Kontinuumsmechanik

Mit einem Geleitwort von Friedrich H. Busse

Mit 186 Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
2 Kinematische Beschreibung der Kontinua	11
2.1 Kontinuierlicher Index	11
2.2 Euler- und Lagrange-Bild	12
2.3 Materialableitung	13
2.4 Verschiebungsfeld	15
2.5 Distorsions-, Dehnungs- und Drehtensor	17
2.5.1 Dehnungen	19
2.5.2 (*) Relative Volumenänderung und Kontinuitätsgleichung	22
2.5.3 Zerlegung in Dehnungs- und Drehtensor	23
3 Kräfte, Verformungen und Spannungen	25
3.1 Gleichgewicht und äußere Kräfte	25
3.2 Spannungen und Spannungsvektor	26
3.3 Der Spannungstensor	27
3.3.1 Bedeutung der Komponenten	27
3.3.2 Symmetrie des Spannungstensors	28
3.4 Spannungen und Kräfte	29
3.5 Das Materialgesetz	30
3.6 Aufspaltungen des Dehnungstensors	31
3.6.1 Kompression und Scherung	31
3.6.2 Lamé-Konstanten	33
3.6.3 (*) Young-Modul und Poisson-Zahl	33
4 Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	37
4.1 Elastostatik	37
4.2 (*) Fundamentallösung	38
4.2.1 Zwei Beispiele singulärer Kraftfelder	40
4.3 Elastodynamik	42
4.4 Wellen	43
4.4.1 Wellengleichungen	43
4.4.2 Lösungen der Wellengleichung	44
4.4.3 Reine Kompressionswellen	48
4.4.4 Longitudinale und transversale Wellen	49

5 Ideale Flüssigkeiten	51
5.1 Euler-Gleichungen	51
5.2 Kontinuitätsgleichung	53
5.2.1 Kompressible Flüssigkeiten	53
5.2.2 Inkompressible Flüssigkeiten	53
5.3 (*) Erhaltungsgleichungen	55
5.3.1 Globale und lokale Erhaltungsgleichungen	55
5.3.2 Impulsstrom	56
5.4 Materialgesetze und Zustandsgleichungen	57
5.5 Randbedingungen	61
5.5.1 Fester Rand und Stromlinien	61
5.5.2 Freie Oberflächen	62
5.6 Hydrostatik	65
5.6.1 Grundgleichungen	65
5.6.2 Barometrische Höhenformel	66
5.6.3 (*) Reales Gas im konstanten Schwerefeld	67
5.6.4 Oberflächengestalt einer rotierenden inkompressiblen Flüssigkeit	68
5.6.5 Oberflächengestalt unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung	69
5.6.6 Tropfenbildung und Kontaktwinkel	70
5.7 Stationäre Strömungen	71
5.7.1 Euler-Gleichungen für eine stationäre Strömung	71
5.7.2 Ebene, inkompressible Strömung, Stromfunktion	72
5.7.3 Potentialströmung	76
5.8 Ebene Potentialströmung	78
5.8.1 Erhaltung des Wirbelfeldes	78
5.8.2 Stromfunktion und Potential	79
5.8.3 Der umströmte Zylinder	80
5.8.4 Komplexe Funktionentheorie	84
5.8.5 (*) Konforme Abbildungen	90
5.8.6 Die Auftriebsformel von Kutta und Joukowsky	94
5.8.7 (*) Der umströmte Tragflügel	98
6 Oberflächenwellen	103
6.1 Grundgleichungen und Randbedingungen	103
6.2 Schwerewellen	104
6.2.1 Grundgleichungen	105
6.2.2 Dispersionsrelation	106
6.2.3 Oberflächenprofil und Potential	107
6.2.4 Teilchenbahnen	107
6.2.5 Stromlinien	112
6.3 Wellen mit endlicher Amplitude – Stokes-Wellen	113
6.3.1 Aufteilung und Wellenbrechung	114
6.3.2 Dispersion	115
6.3.3 Stokes-Wellen	116

6.4	Flachwassergleichungen	123
6.4.1	Reduzierte Gleichungen	123
6.4.2	Lange Wellen – Skalierung und Kleinheitsparameter	123
6.4.3	Iterative Lösung der Laplace-Gleichung	124
6.4.4	Die Flachwassergleichungen	125
6.4.5	Dispersionsrelation	126
6.4.6	Numerische Lösungen	126
6.4.7	Lange Wellen über variablem, zeitlich konstantem Grund	129
6.4.8	Lineare Wellengleichung mit ortsabhängiger Phasengeschwindigkeit	132
6.4.9	Wellenerzeugung durch einen zeitlich variablen Grund	139
6.4.10	Tsunamis	142
6.5	Solitonen	147
6.5.1	Die Entdeckung von John Scott Russell	148
6.5.2	Die Korteweg – de Vries – Gleichung	149
6.5.3	Lösungen der KdV-Gleichung – homokline Orbits	152
6.5.4	Wechselwirkung zweier Solitonen	156
6.5.5	Definition des Solitons	157
6.5.6	Die Sine-Gordon-Gleichung – heterokline Orbits	157
6.6	Kapillarwellen	161
6.6.1	Dispersionsrelation	162
6.6.2	Solitonen und Antisolitonen	164
7	Viskose Flüssigkeiten	167
7.1	Die Navier-Stokes-Gleichungen	168
7.1.1	Der zähe Spannungstensor	168
7.1.2	Navier-Stokes-Gleichungen	172
7.1.3	Randbedingungen	173
7.2	Anwendungen	177
7.2.1	Dissipation der Energie	177
7.2.2	Rohrströmung	179
7.2.3	(*) Strömung zwischen zwei rotierenden, konzentrischen Zylindern	182
7.2.4	(*) Dämpfung einer Potentialströmung durch Reibung	185
7.3	Das Ähnlichkeitsgesetz	186
7.3.1	Skalierung und Reynolds-Zahl	187
7.3.2	Grenzfälle kleiner und großer Reynolds-Zahl	188
7.4	Grenzschichten	195
7.4.1	Wirbelsätze und Wirbeltransport	195
7.4.2	Skalierung und Dicke der Grenzschicht	195
7.4.3	Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen	197
7.4.4	Ablösung der Grenzschicht	202
7.5	Nicht-Newton'sche Flüssigkeiten	205
7.5.1	Klassifizierung	205
7.5.2	Zeitunabhängige Flüssigkeiten	206
7.5.3	Viskoelastische Flüssigkeiten	210
7.5.4	Verallgemeinerte lineare Maxwell-Flüssigkeiten	212

8 Hydrodynamische Instabilitäten	221
8.1 Strukturbildung	222
8.1.1 Instabilitäten	223
8.1.2 Periodische Strukturen im Ort	224
8.1.3 Periodische Strukturen in der Zeit	227
8.1.4 (*) Kodimension Zwei	228
8.1.5 Wellen	230
8.2 Taylor-Wirbel	230
8.2.1 Das lineare Problem	231
8.2.2 Eine Näherungslösung des linearen Problems	233
8.3 Konvektion	235
8.3.1 Strukturen und Instabilitätsmechanismus	236
8.3.2 Die Gundgleichungen der Konvektion	238
8.3.3 Lineares Problem	240
8.3.4 (*) Das lineare Problem für freie Randbedingungen	241
8.3.5 (*) Vollständig nichtlineare Gleichungen – numerische Lösungen	245
8.3.6 Bénard-Marangoni-Konvektion	250
8.4 Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität	256
8.4.1 Ein Mechanismus zur Wellenerzeugung	256
8.4.2 Die Grundgleichungen	258
8.4.3 Lineare Stabilitätsanalyse	259
8.4.4 (*) Flachwassergleichungen	264
8.5 Die Faraday-Instabilität	269
8.5.1 Grundgleichungen und lineares Problem	269
8.5.2 (*) Die Mathieu-Gleichung	271
8.5.3 Numerische Lösungen der Flachwasser-Gleichungen	275
8.6 Dünne viskose Filme	275
8.6.1 Die Grundgleichungen in der Schmiermittelnäherung	276
8.6.2 Laplace-Druck und Gravitation	279
8.6.3 Variationsprinzip und freie Energie	281
8.6.4 Der Trennungsdruck	284
8.6.5 Spinodale Entnetzung	287
8.6.6 Numerische Lösungen	289
8.6.7 (*) Verdampfung und Kondensation	292
9 Modellgleichungen der Strukturbildung	303
9.1 Strukturbildung in der Nähe der Schwelle	303
9.1.1 Ein Beispiel	303
9.1.2 Klassifizierung	306
9.2 Typ H_M : Die reelle Ginzburg-Landau-Gleichung	309
9.2.1 Ginzburg-Landau-Gleichung, Normalform	310
9.2.2 Freie Energie und Gradientendynamik	311
9.2.3 Numerische Lösung, Interpretation der Strukturen	312
9.3 Typ H_O : Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung	313
9.3.1 Normalform und homogene Lösung	313
9.3.2 Methode der Phasengleichungen	314
9.3.3 Die Benjamin-Feir-Instabilität	315

9.4	Typ T_M : Die Swift-Hohenberg-Gleichung	317
9.4.1	Instabile und stabile Moden	317
9.4.2	Endliche Bandbreiten	319
9.4.3	Numerische Lösungen, Streifen	322
9.4.4	Kompliziertere Nichtlinearitäten und Versklavung	322
9.4.5	Streifen, Hexagone und Quadrate	326
9.4.6	Typ T_O : Die komplexe Swift-Hohenberg-Gleichung	333
9.5	Typ KO_M : Die Cahn-Hilliard-Gleichung	336
9.5.1	Phasenfeldmodelle	336
9.5.2	Extremalprinzip	336
9.5.3	Gradientendynamik	337
9.5.4	Cahn-Hilliard-Gleichung	338
9.5.5	Coarsening	341
9.5.6	Die erweiterte Cahn-Hilliard-Gleichung	342
9.5.7	Andere KO_M -Normalformen	344
10	Numerische Näherungsverfahren	345
10.1	Partielle Differentialgleichungen	345
10.1.1	Galerkin-Verfahren	346
10.1.2	Finite Differenzen	347
10.1.3	Quasilineare Gleichungen	350
10.1.4	Zeititeration	351
10.1.5	Neumann'sche Stabilitätsanalyse	353
10.1.6	Pseudo-Spektral-Methode	355
10.1.7	Mehrschrittverfahren	357
10.1.8	Randbedingungen	360
10.2	Orthogonale Polynome im Intervall $[0,1]$	360
10.2.1	Dirichlet-Randbedingungen	361
10.2.2	Orthogonale Polynome, „no-slip“-Bedingungen	362
10.2.3	Jacobi-Polynome	364
A	Funktionale	367
A.1	Die Funktionalableitung	367
A.2	Beispiele	368
A.3	Euler-Lagrange-Gleichung	369
B	Formelsammlung	371
B.1	Vektorrechnung	371
B.2	Vektoranalysis	372
B.3	Integralsätze	373
B.3.1	Volumen- und Oberflächenintegrale	373
B.3.2	Flächen- und Linienintegrale	374
B.4	Differentialoperatoren	374
B.4.1	Bezeichnungen	374
B.4.2	Gradient	376
B.4.3	Divergenz	377

XIV Inhaltsverzeichnis

B.4.4	Rotation	378
B.4.5	Laplace	378
B.5	Die Grundgleichungen in krummlinigen Koordinaten	379
B.5.1	Kartesische Koordinaten	379
B.5.2	Zylinderkoordinaten	380
B.5.3	Kugelkoordinaten	381
Literatur		383
Index		387