

Helmut Koch

Einführung in die Mathematik

Hintergründe der Schulmathematik

Zweite, korrigierte und erweiterte Auflage



Springer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Natürliche Zahlen	11
1.1 Zählen	11
1.2 Die Nachfolgerbeziehung	11
1.3 Bezeichnungen für natürliche Zahlen	11
1.4 Mengen und Abbildungen von Mengen	12
1.5 Axiome für die Nachfolgerbeziehung	14
1.6 Definition und Beweis durch vollständige Induktion	15
1.7 Grundregeln der Addition	18
1.8 Kleinerbeziehung und Subtraktion	21
1.9 Addition, Folgerungen aus den Grundregeln	24
1.10 Definition der Multiplikation	25
1.11 Die Grundregeln der Multiplikation und das Distributivgesetz	26
1.12 Teilerbeziehung und Division	29
1.13 Division mit Rest und euklidischer Algorithmus	32
1.14 Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	34
1.15 Potenzen	37
1.16 Das Summen- und Produktzeichen	38
2 Die 0 und die ganzen Zahlen	43
2.1 Die römischen Zahlzeichen	43
2.2 Die Einführung der 0	44
2.3 Der Zahlenstrahl und die geometrische Reihe	47
2.4 Negative Zahlen	48
2.5 Beweis der Rechengesetze der Addition und Multiplikation	51
2.6 Die Kleinerbeziehung im Bereich der ganzen Zahlen	57
2.7 Die Potenzen von ganzen Zahlen	58
2.8 Variation über das Thema „Beweis durch vollständige Induktion“	61
2.9 Positionssysteme	63
2.10 Die Grundrechenarten in einem Positionssystem	66
2.11 Lineare Diophantische Gleichungen	72
2.12 Der Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung	77

VIII Inhaltsverzeichnis

2.13	Folgerungen aus der eindeutigen Primzahlzerlegung	79
2.14	Teilbarkeitsregeln	81
2.15	Der kleine Fermatsche Satz	84
2.16	Public Key Cryptology	86
3	Rationale Zahlen	89
3.1	Definition der rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen geord- neter Paare	90
3.2	Definition von Addition und Multiplikation rationaler Zahlen	93
3.3	Die Rechengesetze für rationale Zahlen	95
3.4	Die Bruchrechnung	97
3.5	Potenzen von rationalen Zahlen	99
3.6	Die Kleinerbeziehung für rationale Zahlen	102
3.7	Positionsbrüche	106
3.8	Über die Perioden der Positionsdarstellungen rationaler Zahlen	112
3.9	Die Summe der m -ten Potenzen	116
3.10	Irrationale Zahlen	118
4	Reelle Zahlen	123
4.1	Fundamentalfolgen	123
4.2	Definition der reellen Zahlen	128
4.3	Die Grundrechenoperationen mit reellen Zahlen	129
4.4	Die Kleinerbeziehung für reelle Zahlen	132
4.5	Unendliche Positionsbrüche	133
4.6	Vollständigkeit	137
4.7	Wurzeln	139
4.8	Potenzen mit rationalen Exponenten	143
4.9	Potenzen mit reellen Exponenten	145
4.10	Unendliche Summen	149
4.11	Beschränkte Zahlmengen	151
5	Euklidische Geometrie der Ebene	155
5.1	Das Inzidenzaxiom und das Abstandsaxiom	156
5.2	Strecken, Strahlen und konvexe Mengen	159
5.3	Winkel und Dreiecke	162
5.4	Winkelmessung	165
5.5	Kongruenz	167
5.6	Parallelen und Senkrechte	171
5.7	Das Parallelaxiom	173
5.8	Ähnlichkeit von Dreiecken	176
5.9	Rechtwinklige Dreiecke	179
5.10	Kreise	183
5.11	Koordinatensysteme	188
5.12	Bewegungen	195

6	Reelle Funktionen einer Veränderlichen	197
6.1	Polynomfunktionen	198
6.2	Stetige Funktionen	200
6.3	Der Satz von Bolzano	202
6.4	Die Umkehrabbildung	206
6.5	Streng monotone Funktionen	209
6.6	Die Definition des Differentialquotienten	211
6.7	Differentiationsregeln	216
6.8	Potenz, Exponentialfunktion und Logarithmus	219
6.9	Der Mittelwertsatz	226
6.10	Potenzreihenentwicklung	229
6.11	Extremwerte einer Funktion	234
6.12	Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe des Differentialquotienten	236
7	Maß und Integral	241
7.1	Teilmengen der euklidischen Ebene	241
7.2	Dreiecke	244
7.3	Polygone	247
7.4	Meßbare Teilmengen der euklidischen Ebene	255
7.5	Die Kreisscheibe	258
7.6	Das bestimmte Integral	263
7.7	Der Hauptsatz der Integralrechnung	268
7.8	Weitere Regeln für den Umgang mit Integralen	269
7.9	Die Kurvenlänge	272
7.10	Die Bogenlänge des Kreises	279
7.11	Das Cartesische Modell der euklidischen Geometrie	284
7.12	Verifikation der Axiome $\mathcal{E}.1$ bis $\mathcal{E}.3$	285
7.13	Kurvenlänge und Bewegungen	286
7.14	Verifikation von Axiom $\mathcal{E}.5$	289
8	Trigonometrie	291
8.1	Die trigonometrischen Funktionen	291
8.2	Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen	294
8.3	Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen	296
8.4	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	298
8.5	Dreiecksberechnungen	300
8.6	Drehungen	304
9	Die komplexen Zahlen	307
9.1	Quadratische Gleichungen	308
9.2	Die Definition der komplexen Zahlen	309
9.3	Polarkoordinaten	311
9.4	Komplex-konjugierte Zahlen	313
9.5	Die Analysis der komplexen Zahlen	314

XI Inhaltsverzeichnis

9.6	Komplexe Funktionen	316
9.7	Der sogenannte Hauptsatz der Algebra	317
9.8	Polynome mit Koeffizienten in Zahlkörpern	319
9.9	Rationale Funktionen mit Koeffizienten in Zahlkörpern	323
9.10	Gleichungen dritten Grades mit komplexen Koeffizienten	326
9.11	Gleichungen dritten Grades mit reellen Koeffizienten	329
9.12	Potenzreihen	330
10	Nicht-euklidische Geometrie	335
10.1	Das Poincarésche Modell der nicht-euklidischen Geometrie ...	336
10.2	Der nicht-euklidische Abstand zweier Punkte	337
10.3	Nicht-euklidische Bewegungen	340
10.4	Das Trennungsaxiom	344
10.5	Nicht-euklidische Winkelmessung	346
10.6	Das Kongruenzaxiom	349
10.7	Der n.-e. Satz des Pythagoras	350
11	Lösungen der Aufgaben	355
	Literaturverzeichnis	393
	Index	395
	Symbolverzeichnis	395
	Sachwortregister	399
	Namensregister	405