

1	Einleitung	1
2	Theoretischer Rahmen und ausgewählter Forschungsstand	5
2.1	Mathematische Erkenntnisentwicklung	5
2.1.1	Mathematik als Prozess	5
2.1.2	Mathematik betreiben	9
2.1.3	Authentischer Mathematikunterricht	15
2.2	Argumentationsprozesse	16
2.2.1	Argumentieren, Begründen und Beweisen	17
2.2.2	Der Umgang mit Vermutungen	22
2.2.3	Der Umgang mit Konflikten	25
2.3	Begründungsbedürfnis als Lernziel	27
2.4	Haltung als mathematikdidaktisches Konzept	34
2.5	Forschungsanliegen	41
3	Methodologischer und methodischer Rahmen	47
3.1	Design Research	47
3.2	Qualitatives Forschungsdesign	52
3.3	Aufbau der Studie	54
3.3.1	Überblick über die Untersuchungsphasen	54
3.3.2	Datenmaterial	57
4	Konstruktive Perspektive – Konzeption einer Unterrichtseinheit	61
4.1	Theoretische Grundlagen der Unterrichts- und Aufgabenkonzeption	61
4.1.1	Allgemeine lehr-lerntheoretische Grundlagen	62

4.1.2	Prozessorientierung im Mathematikunterricht	64
4.1.3	Substantielle Lernumgebungen	67
4.2	Konzeption der Aufgaben	70
4.2.1	Curricularer Rahmen	70
4.2.2	Didaktisches Potential graphentheoretischer Kontexte	73
4.2.3	Didaktische Analyse der Aufgaben	76
4.2.4	Erprobung und Schlussfolgerungen	86
4.3	Konzeption der Unterrichtsstunden	91
4.3.1	Unterrichtsplanung	91
4.3.2	Durchführung und Weiterentwicklung	103
4.4	Fazit	116
5	Rekonstruktive Perspektive – Empirische Interviewstudie	121
5.1	Theoretische Grundlagen der qualitativen Interviewstudie	121
5.1.1	Halbstandardisierte Interviews	122
5.1.2	Methode des Lauten Denkens	124
5.2	Konzeption der Interviewaufgaben	125
5.3	Entwicklung und Überarbeitung des Interviewleitfadens	131
5.4	Datenaufbereitung	135
5.5	Analyseverfahren	136
5.5.1	Qualitative Inhaltsanalyse	137
5.5.2	Interpretative Forschung	138
5.5.3	Ablauf des Analyseprozesses und exemplarische Analyse	139
5.6	Ergebnisse	146
5.6.1	Haltungen im Umgang mit Vermutungen	147
5.6.1.1	Kategoriensystem	147
5.6.1.2	Idealtypische Haltungen von Schülern im Umgang mit Vermutungen	155
5.6.2	Ausgewählte Fallbeispiele	160
5.6.2.1	Sina: kritisch-obstruktive Haltung	162
5.6.2.2	Leonie: kritisch-konstruktive Haltung	168
5.6.2.3	Lina: kritisch-konstruktive Haltung	173
5.6.2.4	Frida: kritisch-obstruktive Haltung	176
5.6.2.5	Jakob: unkritisch-obstruktive Haltung	179
5.6.2.6	Alex: unkritisch-konstruktive Haltung	183
5.6.2.7	Zusammenfassung der Einzelfallanalysen	188

5.6.2.8	Anzeichen individueller Lernprozesse hinsichtlich des Hinterfragens von Vermutungen	190
5.6.3	Zusammenhang zwischen Haltungen und Argumentationsprozessen	196
5.6.3.1	Leonie und Emily	196
5.6.3.2	Alex und Milo	209
5.6.3.3	Zusammenfassung und Vergleich	221
5.6.3.4	Ausschnitte potentiell problematischer Kombinationen von Haltungen	224
5.6.4	Schlussfolgerungen aus der empirischen Untersuchung	235
5.6.5	Konsequenzen für den Mathematikunterricht	239
6	Fazit und Ausblick	245
6.1	Beantwortung der Forschungsfragen	245
6.2	Diskussion der Ergebnisse	252
6.3	Zusammenfassung und Perspektiven	255
Literatur	259	