

May-Britt Kallenrode

Rechenmethoden der Physik

Mathematischer Begleiter
zur Experimentalphysik

Mit 47 Abbildungen,
297 Aufgaben und Lösungen



Springer

Inhaltsverzeichnis

Teil I Erste Schritte Rechnen in der Mechanik

1	Rechnen mit Vektoren	3
1.1	Grundlagen	3
1.2	Orts- und Verschiebungsvektor	4
1.3	Koordinatensysteme	5
1.3.1	Kartesische Koordinaten	5
1.3.2	Polarkoordinaten	6
1.3.3	Winkel in Grad- und Bogenmaß	8
1.3.4	Zylinderkoordinaten	10
1.3.5	Kugelkoordinaten	11
1.4	Vektoralgebra in kartesische Koordinaten	12
1.4.1	Gleiche, inverse und parallele Vektoren	12
1.4.2	Vektoraddition und -subtraktion	13
1.4.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	14
1.5	Skalarprodukt	15
1.5.1	Komponentenweise Darstellung	15
1.5.2	Rechenregeln und Anwendungen	16
1.6	Kreuzprodukt	18
1.6.1	Grundlagen	18
1.6.2	Rechenregeln	19
1.6.3	Komponentenweise Darstellung	19
1.7	Spatprodukt	22
1.8	Mehrfachprodukte	24
	Aufgaben	25
2	Differentiation	29
2.1	Funktionen	29
2.1.1	Eigenschaften von Funktionen	30
2.1.2	Wichtige Funktionen	31
2.2	Differentialrechnung	36
2.2.1	Grundbegriffe	36
2.2.2	Differentialquotient	37
2.2.3	Wichtige Ableitungen	37

X Inhaltsverzeichnis

2.2.4	Ableitung einer in Parameterform dargestellten Funktion	38
2.3	Funktionen von Vektoren	38
2.3.1	Differentiation von Vektoren	39
2.4	Partielle Ableitung	41
2.4.1	Funktion zweier Variablen	41
2.4.2	Partielle Ableitung	42
2.4.3	Koordinatensysteme: Transformation der Basisvektoren	44
2.5	Potenzreihenentwicklung	49
2.5.1	Folgen und Reihen	49
2.5.2	Taylor-Entwicklung	50
2.5.3	MacLaurin'sche Reihe	51
	Aufgaben	53
3	Integration	59
3.1	Grundlagen	59
3.1.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral	60
3.1.2	Wichtige Integrale	62
3.2	Grundregeln des Integrierens	62
3.2.1	Faktorregel	63
3.2.2	Summenregel	63
3.2.3	Substitutionsmethode	64
3.2.4	Partielle Integration (Produktintegration)	66
3.2.5	Rotationskörper	68
3.2.6	Fläche zwischen zwei Kurven	68
3.3	Mehrfachintegrale	69
3.3.1	Doppelintegrale	70
3.3.2	Dreifachintegrale	72
3.4	Integration einer vektorwertigen Funktion (Riemann-Integral)	75
	Aufgaben	76
4	Komplexe Zahlen	81
4.1	Definition und Darstellung	81
4.2	Elementare Rechenvorschriften	83
4.2.1	Addition und Subtraktion	83
4.2.2	Multiplikation zweier komplexer Zahlen	84
4.2.3	Konjugiert komplexe Zahl	84
4.2.4	Division zweier komplexer Zahlen	85
4.3	Euler'sche Formel	85
4.4	Potenzieren und komplexe Wurzel	86
	Aufgaben	88

5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	91
5.1	Was ist eine Differentialgleichung (DGL)?	91
5.2	Lösung durch Raten	93
5.3	Gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung	94
5.4	Homogene lineare DGL erster Ordnung	94
5.4.1	Separation der Variablen	95
5.4.2	Anfangs- oder Randbedingungen	95
5.4.3	Zusammenfassung: Trennung der Variablen	95
5.5	Homogene lineare DGL erster Ordnung mit konstantem Summanden	97
5.6	Inhomogene lineare DGL erster Ordnung	100
5.6.1	Variation der Konstanten	100
5.6.2	Aufsuchen einer partikulären Lösung	102
	Aufgaben	103
6	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	107
6.1	Grundlagen	107
6.2	Homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung	108
6.2.1	Exponentialansatz	108
6.2.2	Linearer harmonischer Oszillator	110
6.2.3	Gedämpfte Schwingung	113
6.2.4	Zusammenfassung: Homogene DGL 2. Ordnung	119
6.3	Inhomogene DGL: Erzwungene Schwingung	119
6.3.1	Zusammenfassung: Inhomogene DGL	121
	Aufgaben	121
7	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	125
7.1	Die Idee	125
7.1.1	Differentialgleichung erster Ordnung	125
7.1.2	Differentialgleichung zweiter Ordnung	128
7.2	Euler-Verfahren	129
7.3	Leapfrog-Verfahren (Halbschritt-Verfahren)	131
7.4	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	132
	Aufgaben	134
8	Matrizen	137
8.1	Grundbegriffe	137
8.1.1	Transponierte einer Matrix	138
8.1.2	Quadratische Matrizen	139
8.2	Rechenoperationen und -regeln	139
8.3	Determinanten	142
8.3.1	Unterdeterminanten	143
8.3.2	Rechenregeln	144
8.4	Reguläre und orthogonale Matrizen	147
8.5	Komplexe Matrizen	148

XII Inhaltsverzeichnis

8.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	150
8.6.1	Diagonalform	152
8.7	Drehungen	153
8.7.1	Drehmatrix	153
8.7.2	Transformation von Vektoren und Matrizen	156
8.7.3	Trägheitstensor	157
	Aufgaben	159

Teil II Von Feldern und Wellen

Rechnen in der Elektrodynamik

9	Delta-Funktion	165
9.1	Eindimensionale Delta-Funktion	165
9.1.1	Annäherungen	166
9.1.2	Eigenschaften der Delta-Funktion	167
9.2	Delta-Funktion in drei Dimension	170
	Aufgaben	171
10	Differentiation von Feldern: Gradient, Divergenz und Rotation	173
10.1	Skalar- und Vektorfelder	173
10.1.1	Spezielle Felder	174
10.1.2	Darstellung von Vektorfeldern in krummlinigen Koordinaten	175
10.2	Gradient	175
10.2.1	Definition und Eigenschaften	176
10.2.2	Spezielle Felder	177
10.2.3	Totales Differential	179
10.2.4	Gradient in krummlinigen Koordinaten	179
10.2.5	Rechenregeln	180
10.2.6	Richtungsableitung	180
10.3	Divergenz	181
10.3.1	Anschauung	181
10.3.2	Definition und Eigenschaften	182
10.3.3	Spezielle Felder	183
10.3.4	Rechenregeln	184
10.3.5	Krummlinige Koordinaten	185
10.4	Laplace-Operator	185
10.4.1	Krummlinige Koordinaten	186
10.5	Rotation	186
10.5.1	Definition und Eigenschaften	186
10.5.2	Spezielle Felder	187
10.5.3	Krummlinige Koordinaten	188
10.5.4	Rechenregeln	188

10.6 Der Nabla-Operator zusammengefaßt	189
Aufgaben	190
11 Integration von Feldern: Kurven- und Flächenintegrale	193
11.1 Kurven und Flächen	193
11.1.1 Darstellung ebener und räumlicher Kurven	194
11.1.2 Flächen im Raum	195
11.1.3 Flächen vom Typ $z = f(x, y)$	196
11.2 Kurvenintegrale	196
11.2.1 Eigenschaften	198
11.2.2 Konservative Felder	198
11.3 Oberflächenintegrale	199
11.4 Gauß'scher Integralsatz	202
11.4.1 Divergenz als Quellstärke des Feldes	202
11.4.2 Gauß'scher Integralsatz	203
11.5 Stokes'scher Integralsatz	207
11.5.1 Rotation als Wirbelstärke	207
11.5.2 Stokes'scher Integralsatz	208
Aufgaben	210
12 Partielle Differentialgleichungen	215
12.1 Partielle DGLs in der Physik	215
12.1.1 Die Poisson-Gleichung	216
12.1.2 Weitere partielle DGLs	216
12.2 Poisson-Gleichung	217
12.2.1 Punktladung	217
12.2.2 Allgemeine Ladungsdichteverteilung	219
12.2.3 Randbedingungen	221
12.2.4 Multipolentwicklung	221
12.2.5 Poisson-Gleichung in der Magnetostatik	223
12.3 Diffusionsgleichung	223
12.3.1 Random Walk und mittleres Abstandsquadrat – anschaulich	224
12.3.2 Eindimensionale Diffusionsgleichung	227
12.3.3 Lösung der Diffusionsgleichung für eine δ -Injektion ..	229
12.3.4 Allgemeine Lösung	229
12.4 Wellengleichung	230
12.4.1 Herleitung der Wellengleichung	230
12.4.2 Eindimensionale Wellen	231
12.4.3 Harmonische Wellen	232
12.4.4 Stehende Wellen	233
12.4.5 Separationsansatz	234
12.5 Zweidimensionale ebene Wellen	237
12.6 Dreidimensionale ebene Wellen	238
Aufgaben	238

**Teil III Ein entschiedenes Jein
Wahrscheinlichkeiten und Fehler**

13 Wahrscheinlichkeit, Entropie und Maxwell-Verteilung	243
13.1 Kombinatorik	243
13.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung	245
13.2.1 Grundbegriffe	246
13.2.2 Wahrscheinlichkeit	246
13.2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit	248
13.2.4 Bayes'sche Formel	249
13.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen	251
13.3.1 Grundbegriffe	252
13.3.2 Kenngrößen einer Verteilung	256
13.3.3 Binomialverteilung	258
13.3.4 Poisson-Verteilung	260
13.3.5 Gauß'sche Normalverteilung	261
13.4 Entropie und Maxwell-Boltzmann-Verteilung	263
13.4.1 Information und Entropie	263
13.4.2 Maximale Unbestimmtheit	269
13.4.3 Boltzmann-Verteilung	270
Aufgaben	272
14 Messung und Meßfehler	275
14.1 Charakterisierung von Meßdaten	276
14.2 Verteilung von Meßwerten, Mittelwert und Varianz	277
14.2.1 (Normalverteilte) Meßwerte	277
14.2.2 'Zählen' und Poisson-Verteilung	278
14.2.3 Mittelwert und Standardabweichung aus den Meßwerten	279
14.2.4 Vertrauensbereich für den Mittelwert	280
14.3 Fehlerfortpflanzung	281
14.3.1 Summen oder Differenzen	282
14.3.2 Multiplikation mit einer Konstanten	282
14.3.3 Multiplikation oder Division	283
14.3.4 Potenzgesetz	283
14.4 Ausgleichsrechnung	284
14.4.1 Lineare Regression	284
14.4.2 Lineare Regression unter Berücksichtigung der Meßfehler	289
14.4.3 Rang-Korrelation	291
Aufgaben	292

Lösungen	295
Literaturverzeichnis	329
Sachverzeichnis	331