

Inhalt

Vorwort	xxi
Was du brauchst	xxiv
1 Der Zirkel	1
1.1 Fragen und Antworten	2
Wie benutze ich den Zirkel?	2
Was genau ist ein Kreis?	2
Wozu soll ich Kreise zeichnen?	3
Was ist eine geometrische Konstruktion?	4
Wie kann ich einen Kreis mit 5 cm Radius durch zwei Punkte legen?	4
Wie kommt hierbei Symmetrie ins Spiel?	6
Wie kann ich durch drei Punkte einen Kreis zeichnen?	8
1.2 Ausblick	9
1.3 Bauanleitung.	10
Zirkel	10
Stangenzirkel	12
2 Der Fasskreis	15
2.1 Fragen und Antworten	16
Was ist ein Fasskreisbogen?	16
Zeichnet das Modell tatsächlich einen Kreisbogen?	16
Wie viele Fasskreisbögen gibt es?	17
Wodurch unterscheiden sich die beiden Fasskreisbögen?	17
Gehen die Fasskreisbögen bis zu den Punkten A und B?	17
Was ist eine Sehne?	17
Was ist der Sehnen-Winkel-Satz?	18
Wie kann man den Sehnen-Winkel-Satz beweisen?	18
Was passiert, wenn der Kreisbogen 180° oder weniger umfasst?	19
Wie kann man Fasskreisbögen mit dem Zirkel zeichnen?	19
Kann das Modell nur Fasskreise zu 60° -Winkeln zeichnen?	20
2.2 Bauanleitung.	20

3	Der Sextant	23
3.1	Fragen und Antworten	24
	Was kann ich mit dem Sextanten messen?	24
	Was ist der Winkel zwischen zwei Objekten im Gelände?	24
	Wie funktioniert der Sextant?	25
	Was muss ich vor jeder Messung machen?	26
	Muss ich vor jeder Messung den Indexfehler bestimmen?	28
	Wie geht die eigentliche Messung vor sich?	29
	Wie genau ist der Sextant?	30
	Was nützen mir Winkelmessungen?	30
	Wie funktioniert Rückwärtseinschneiden?	30
	Wie funktioniert die Astronavigation?	32
	Kann ich Gestirnhöhen messen, auch wenn ich nicht am Meer bin?	33
	Was ist der Vorteil des Sextanten?	33
	Wie kommt die Skala zustande?	33
	Wie funktioniert die Minutenkala?	34
3.2	Ausblick	35
3.3	Bauanleitung.	36
4	Der Rechenfrosch	43
4.1	Fragen und Antworten	44
	Wie bediene ich den Frosch?	44
	Wofür steht das Q nach der 12?	44
	Gibt es für den Frosch eine Vorlage?	44
	Warum kein Affe, sondern ein Frosch?	45
	Wie funktioniert der Frosch?	45
	Welche Geometrie steckt im Rechenfrosch?	46
	Kann der Frosch auch addieren, subtrahieren und dividieren?	49
4.2	Ausblick	50
4.3	Bauanleitung.	50
5	Der Rechenschieber	55
5.1	Fragen und Antworten	56
	Was kann ich mit dem Rechenschieber machen?	56
	Wie kann ich multiplizieren?	56

Kann ich auch größere Zahlen multiplizieren?	56
Was ist die Fließkomma-Darstellung von Zahlen?	57
Wie kann ich dividieren?	57
Wie kann ich die Wurzel ziehen?	57
Wie sieht ein kommerzieller Rechenschieber aus?	58
Wie funktioniert ein Rechenschieber?	58
Was sind die Potenzgesetze?	58
Wie addiere ich zwei Zahlen mit zwei Geodreiecken?	59
Was ist eine logarithmische Skala?	60
Wieso heißen logarithmische Skalen nicht exponentielle Skalen?	60
Was ist eine Oktave?	61
Was hat unser Geld mit logarithmischen Skalen zu tun?	61
5.2 Bauanleitung.	62
Kleiner Rechenschieber	62
Großer Rechenschieber	63
6 Der Sinuscomputer	65
6.1 Fragen und Antworten	66
Was kann ich mit dem Sinuscomputer machen?	66
Wie bestimme ich Sinus und Cosinus eines Winkels?	66
Wie genau ist der Sinuscomputer?	66
Was sind eigentlich Sinus und Cosinus eines Winkels?	67
Wie funktioniert der Sinuscomputer?	68
Was ist eine Hypozykloide?	69
6.2 Bauanleitung.	70
Sinuscomputer	70
Deltoiden	74
7 Das Spiegellineal	75
7.1 Fragen und Antworten	76
Wozu ist das Spiegellineal gut?	76
Wie benutze ich das Spiegellineal?	76
Was sind Tangenten?	78
Gibt es immer eine Tangente?	79
Wie funktioniert das Spiegellineal?	80
Wie sehen Tangenten an Kreisen aus?	81

Darf eine Tangente eine Kurve nur in einem Punkt berühren?	82
Was sind Schmiekgkreise?	82
Wie kann ich die Genauigkeit steigern?	83
Wozu sind Tangenten an Funktionsgraphen gut?	84
Was ist die Ableitung einer Funktion?	85
7.2 Bauanleitung.	86

8 Das Planimeter **87**

8.1 Fragen und Antworten	88
Was kann ich mit dem Planimeter machen?	88
Wie ist das Planimeter aufgebaut?	88
Wie messe ich den Flächeninhalt eines Gebiets?	88
Wie sieht ein kommerzielles Planimeter aus?	90
Was ist das größte technische Problem beim Planimeter? ..	91
Warum sind die Messräder kommerzieller Planimeter viel kleiner?	92
Wie genau ist unser Planimeter?	92
Was passiert, wenn ich die Randkurve gegen den Uhrzeigersinn abfahre?	92
Sind negative Flächeninhalte nicht unsinnig?	93
Kann man Flächeninhalte auch anders messen?	94
Wie kann man Flächeninhalte einfacher Figuren berechnen? ..	95
Welchen Flächeninhalt überstreicht der Unterarm?	98
Wie kommt man zum Flächeninhalt der Kurve?	100
8.2 Ausblick	100
8.3 Bauanleitung	101

9 Die Schleppen **105**

9.1 Fragen und Antworten	106
Was mache ich mit der Schleppen?	106
Wie sehe ich, dass der Führungsstift mittig auf der Kurve ist?	107
Was hat die Schleppen mit einem Fahrrad zu tun?	108
Wie kommen Tangenten ins Spiel?	108
Wie kann ich mit der Schleppen Flächeninhalte messen?	110
Warum funktioniert diese Methode?	111

Wie stelle ich die Schleppe möglichst gut ein?	113
Wer erfand die Schleppe?	115
Wieso zeichnet die Schleppe solch glatte Kurven?	115
Wie kann ich mit der Schleppe grafisch integrieren?	115
9.2 Ausblick	117
9.3 Bauanleitung.	118

10 Der Kompasswagen 121

10.1 Fragen und Antworten	122
Was macht der Kompasswagen?	122
Wer erfand den Kompasswagen?	122
Ist der Wagen praktisch als Kompass zu gebrauchen?	122
Welcher Name wäre besser geeignet?	123
Wie dreht sich der Kompasswagen während der Fahrt?	123
Wie funktioniert der Kompasswagen?	125
Wie groß muss der Abstand der Räder sein?	126
Kann der Wagen auch auf einer Kugel parallelverschieben?	128
Wovon hängt die Parallelverschiebung ab?	130
Kann ich Flächeninhalte auf der Kugel mit dem Kompasswagen messen?	131
10.2 Ausblick	133
10.3 Bauanleitung.	134

11 Der Selbstanttwister 141

11.1 Fragen und Antworten	142
Selbstanttwistung – was soll das sein?	142
Wie ist der Selbstanttwister aufgebaut?	142
Kann sich die Lampe auch in der Mitte drehen?	143
Wie funktioniert die Selbstanttwistung?	144
Kann man den Effekt noch anders verdeutlichen?	146
Was ist der Dirac-Belt-Trick?	147
Was hat der Selbstanttwister mit dem Gürteltrick zu tun?	148
Wer erfand den Selbstanttwister?	149
Wird die Selbstanttwistung in der Praxis eingesetzt?	149
Was liegt dem Effekt mathematisch zugrunde?	149

Wie beschreibt man Lage und Ausrichtung eines Gegenstands?	149
Was ist die Drehgruppe $SO(3)$?	150
Wie kann man das Drehen um 720° formal beschreiben?	152
Wie wird das Drehen um 720° mathematisch aufgelöst?	152
Kann man mit Wegen rechnen?	154
Wieso gibt es nur zwei Sorten von Wegen?	155
Was ist der Twist-Bogen?	156
Wie führt der Twist-Bogen zu Formeln?	156
11.2 Ausblick	162
11.3 Bauanleitung	163
Selbstenttwister	163
Mit LEDs	167
Gebogener Dirac-Gürtel	168

12 Die platonischen Körper 171

12.1 Fragen und Antworten	172
Welche platonischen Körper gibt es?	172
Was ist ein platonischer Körper?	172
Welche Drehsymmetrie besitzen die platonischen Körper?	173
Was ist das Besondere an diesen Drehsymmetrien?	174
Gibt es auch Spiegelsymmetrien?	175
Wie kann ich die platonischen Körper aus fischertechnik bauen?	176
Wie baue ich Polyeder aus gleichseitigen Dreiecken?	178
Was entsteht, wenn in jeder Ecke fünf Dreiecke zusammentreffen?	178
Was entsteht, wenn in jeder Ecke vier Dreiecke zusammentreffen?	180
Was entsteht, wenn in jeder Ecke drei Dreiecke zusammentreffen?	181
Können auch mehr als fünf Dreiecke in einer Ecke zusammentreffen?	182
Wie baue ich Polyeder aus Quadraten?	184
Was entsteht, wenn in jeder Ecke drei Quadrate zusammentreffen?	184
Können mehr als drei Quadrate in einer Ecke zusammentreffen?	185

Wie baue ich Polyeder aus regelmäßigen Fünfecken?	185
Was entsteht, wenn in jeder Ecke drei Fünfecke zusammentreffen?	186
Können mehr als drei regelmäßige Fünfecke in einer Ecke zusammentreffen?	187
Können andere regelmäßige n-Ecke in einer Ecke zusammentreffen?	187
Kann ich spannende nichtplatonische Körper bauen?	188
Was ist die Eulersche Polyederformel?	188
Gilt die Formel auch für nichtkonvexe Polyeder?	189
12.2 Ausblick	190
12.3 Bauanleitungen.	190
Tetraeder	190
Hexaeder (Würfel).	191
Oktaeder	191
Dodekaeder	192
Ikosaeder	192
13 Der Abakus	193
13.1 Fragen und Antworten	194
Was macht der Abakus?	194
Wozu sind die Muster gut?	195
Wozu ist die Teilung der Stange gut?	195
Wie bediene ich den Abakus?	196
Was haben die Muster mit römischen Zahlen zu tun?	196
Wie addiere ich mit dem Abakus?	197
Ist das immer so einfach?	197
Gibt es auch einen »großen Freund«?	198
Kann ich auch subtrahieren, multiplizieren und dividieren?	199
Gibt es auch andere Abakus-Varianten?	199
13.2 Ausblick	200
13.3 Bauanleitung.	200
14 Die kleine Rechenmaschine	203
14.1 Fragen und Antworten	204
Was kann ich mit der kleinen Rechenmaschine machen?	204
Wie rechne ich $54 + 27$?	204

Wie rechne ich $83 - 56$?	204
Wie rechne ich $7 \cdot 8$?	205
Wie rechne ich $68 : 7$?	207
14.2 Bauanleitung.	208
15 Die Multiplikationswalzen	217
15.1 Fragen und Antworten	218
Was kann ich mit den Multiplikationswalzen machen?.....	218
Wie kann ich $7 \cdot 569$ berechnen?.....	218
Ist das immer so einfach?	219
Wie funktionieren die Multiplikationswalzen?	220
Wer hat die Multiplikationswalzen erfunden?.....	221
Was sind die Napierischen Rechenstäbchen?.....	221
Welchen Vorteil bieten die Walzen gegenüber den Stäbchen?.....	222
Woher stammt die diagonale Unterteilung auf den Stäbchen?.....	222
15.2 Ausblick	223
15.3 Bauanleitung.	224
16 Der Analogzähler	229
16.1 Fragen und Antworten	230
Was macht der Analogzähler?	230
Wie lese ich die Anzeige ab?.....	230
Wie funktioniert der Analogzähler?	231
Wie stelle ich den Zähler ein?.....	232
Wozu ist die kontinuierliche Zählung gut?	233
Ist die Bezeichnung »Analogzähler« passend?.....	233
16.2 Bauanleitung.	234
17 Die Rechenmaschine	239
17.1 Fragen und Antworten	240
Wie ist die Rechenmaschine aufgebaut?	240
Wie kann ich schnell etwas Spannendes mit der Maschine rechnen?.....	241
Was kann ich mit der Rechenmaschine alles berechnen? ..	242
Kann ich mit mehr als drei Stellen rechnen?.....	243

Muss ich 43-mal drehen, wenn ich $43 \cdot 21$ berechnen möchte?	243
Wie funktioniert das Rechenwerk?	244
Wer hat die fließende Zehnerübertragung erfunden?	246
Was ist so toll an der fließenden Zehnerübertragung?	247
Was sind die Nachteile der fließenden Zehnerübertragung?	247
Wozu ist die Aufteilung in Rechenwerk und Eingaberegister gut?	247
Was sind Sprossenräder und Staffelwalzen?	247
Warum hat Leibniz keine erfolgreiche Rechenmaschine gebaut?	248
17.2 Ausblick	248
17.3 Bauanleitung.	248

18 Der Binärrechner 261

18.1 Fragen und Antworten	262
Was kann ich mit dem Binärrechner machen?	262
Wie kann ich mit dem Binärrechner zählen?	262
Wie funktioniert das Zählen genau?	264
Funktionieren die Umwandlungen auch bei größeren Zahlen?	265
Was passiert bei der 16. Kugel?	266
Wie kann ich mit dem Binärrechner addieren?	266
Was passiert, wenn das Ergebnis größer als 15 ist?	268
Was ist ein Bit?	269
Wie funktioniert das Addieren genau?	269
In welcher Reihenfolge stoße ich die Kugeln von den Sockeln?	270
Kann ich auch subtrahieren?	271
Wie funktioniert das Subtrahieren?	272
Kann der Binärrechner auch mit negativen Zahlen arbeiten?	273
Was ist mit Multiplikation und Division?	273
Wer hat das binäre Rechnen erfunden?	274
Hat unser Binärrechner eine Vorlage?	274
Warum rechnen elektronische Computer binär?	275
Warum rechnen mechanische Rechenmaschinen dezimal?	276
18.2 Bauanleitung.	276

19 Der DA-Wandler

281

19.1	Fragen und Antworten	282
	Wofür steht die Bezeichnung »DA-Wandler«?	282
	Was kann unser DA-Wandler?	282
	Wie funktioniert unser DA-Wandler?	282
	Was ist ein gewichtetes Mittel?	284
	Kann ich mehr als zwei Bit wandeln?	285
	Wo werden DA-Wandler eingesetzt?	285
	Wie sind elektronische DA-Wandler aufgebaut?	285
	Gibt es auch AD-Wandler?	285
19.2	Ausblick	286
19.3	Bauanleitung.	286

20 Der Seilcomputer

289

20.1	Fragen und Antworten	290
	Wozu ist der Seilcomputer gut?	290
	Wie ist der Seilcomputer aufgebaut?	290
	Wie löse ich ein Gleichungssystem mit dem Seilcomputer?	291
	Gibt es ein Vorbild für den Seilcomputer?	293
	Kann unser Seilcomputer auch größere Systeme lösen?	295
	Was mache ich, wenn meine Koeffizienten nicht passen?	295
	Warum sind lineare Gleichungssysteme wichtig?	296
	Wie funktioniert der Seilcomputer?	297
	Warum ist der Zeiger im Seilcomputer vertikal und nicht horizontal?	300
	Wo muss ich auf die Wippen drücken?	300
	Was passiert, wenn ein Gleichungssystem unlösbar ist?	302
	Was passiert, wenn es unendlich viele Lösungen gibt?	302
	Warum sind permanent stramme Seile nicht gut?	302
	Welche anderen Systeme kann ich ausprobieren?	303
20.2	Ausblick	303
20.3	Bauanleitung.	304
	Die Wippen	304
	Das Unterteil	307
	Das Oberteil	308
	Die Seile	312
	Zusammenbau und Einstellung der Seillängen	314

21 Der xy-Schreiber

317

21.1	Fragen und Antworten	318
	Wie kann ich den xy-Schreiber selber steuern?	318
	Was zeichne ich zuerst?	318
	Welche Kurven kann der xy-Schreiber zeichnen?	319
	Muss der Schreiber in der Ecke eines Tisches stehen?	319
	Kann ich auch etwas Nichtmathematisches mit dem Schreiber machen?	319
21.2	Bauanleitung.	320
	Das Gestell	320
	Der Wagen	324
	Der Schlitten	327
	Die Gewichte und die Seilführung	328
	Variante ohne Laufschienen	330

22 Der Geradenzeichner

333

22.1	Fragen und Antworten	334
	Warum soll ich Geraden mit dem xy-Schreiber zeichnen?	334
	Was ist die Steigung einer Geraden?	334
	Wie kommt die Gerade mechanisch zustande?	335
	Was hat das Ganze mit Funktionen zu tun?	336
	Wie kann ich andere Geraden zeichnen lassen?	336
22.2	Bauanleitung.	336

23 Der Synthesizer

339

23.1	Fragen und Antworten	340
	Was kann der Synthesizer?	340
	Wie ist der Synthesizer aufgebaut?	341
	Wie lege ich mit dem Synthesizer los?	341
	Was zeichne ich zuerst?	342
	Was zeichne ich als Zweites?	343
	Welche Funktionen kann der Synthesizer allgemein zeichnen?	344
	Welche Einheiten verwende ich?	344
	Was ist die wichtigste Komponente des Synthesizers?	345
	Wie funktioniert ein Sinusgenerator?	345

Wie werden die beiden Sinusfunktionen überlagert?	346
Was ist in Abbildung 23–2 dargestellt?	346
Kann ich mehr als zwei Sinusfunktionen überlagern?.....	347
Welcher Zusammenhang besteht zum Musikinstrument? ..	347
Woher stammt das Funktionsprinzip des Synthesizers?.....	347
23.2 Ausblick	348
23.3 Bauanleitung.....	349
24 Der Ellipsenzeichner	357
24.1 Fragen und Antworten	358
Was ist eine Ellipse?.....	358
Wie ist der Ellipsenzeichner aufgebaut?	359
Wie kann ich eine Ellipse zeichnen?.....	359
Wo liegen die Achsen dieser Ellipse?.....	360
Wie kann ich die gezeichnete Ellipse mathematisch beschreiben?	361
Kann ich die Ellipse ohne Sinus und Cosinus beschreiben?..	362
Was passiert, wenn die Rotoren nicht 90° gegeneinander verdreht sind?.....	362
Was sind die Scheitelpunkte einer Ellipse?	363
Was ist ein Zylinderschnitt?	364
Wie konstruiert ein Gärtner eine Ellipse?.....	365
Wie passen die Konstruktionen zusammen?	367
Was sind die Dandelinschen Kugeln?.....	368
Was ist ein Kegelschnitt?	370
Warum heißen die Brennpunkte Brennpunkte?	371
24.2 Ausblick	373
24.3 Bauanleitung.....	374
25 Der Harmonograph	381
25.1 Fragen und Antworten	382
Was kann ich mit dem Harmonographen machen?	382
Wie zeichne ich Lissajous-Figuren mit dem Harmonographen?	382
Welche weiteren Lissajous-Figuren kann ich zeichnen?.....	384
Kann ich der Figur das Frequenzverhältnis ansehen?	384
Was sind Multiplizitäten?	385

Wie hat Lissajous die Kurven untersucht?	385
Was haben die Figuren mit musikalischen Intervallen gemein?	387
Wie kann ich Lissajous-Figuren mathematisch beschreiben?	388
25.2 Ausblick	389
25.3 Bauanleitung.	389

26 Der Isograph 391

26.1 Fragen und Antworten	392
Was ist ein Isograph?	392
Was kann unser Isograph?	393
Wie zeichne ich die Kurven mit dem Isographen?	394
Warum steht ein z in den Gleichungen und kein x ?	395
Was sind komplexe Zahlen?	395
Wie addiere ich komplexe Zahlen?	396
Wie multipliziere ich komplexe Zahlen alternativ?	397
Was ist die Polardarstellung einer komplexen Zahl?	398
Welche Kurven zeichnet der Isograph?	398
Wie löse ich eine Gleichung mit dem Isographen?	399
Was sagt der Fundamentalsatz der Algebra?	404
Woran erkenne ich eine doppelte Nullstelle?	404
Was genau ist die Umlaufzahl?	405
Wie kann ich die Umlaufzahlen schnell bestimmen?	405
Was nutzt mir die Umlaufzahl?	406
Warum zeichnen? Gibt es keine Lösungsformel?	406
26.2 Ausblick	407
26.3 Bauanleitung.	408
Erste Variante	408
Zweite Variante	409

27 Der kgV-Kurbler 411

27.1 Fragen und Antworten	412
Wie bediene ich den kgV-Kurbler?	412
Was ist das kgV?	414
Wie funktioniert der kgV-Kurbler?	415
Wie knapp verpassen sich die Raupenbeläge zwischendurch?	416

Was ist der ggT?	417
Was passiert, wenn der ggT = 1 ist?	417
Was haben kgV und ggT miteinander zu tun?	418
Wie kann ich den ggT zweier Zahlen berechnen?	420
Wann verpassen sich die Raupenbeläge am knappsten?	421
Wie wende ich kgV und ggT in der Bruchrechnung an?	421
Welche Anwendungen des kgV gibt es?	422
27.2 Bauanleitung.	423
28 Der Faktorisierer	429
28.1 Fragen und Antworten	430
Wozu ist der Faktorisierer gut?	430
Gibt es ein Vorbild für den Faktorisierer?	431
Warum gibt es zwei Varianten des Faktorisierers?	432
Wie bediene ich die kleine Variante?	433
Was sind die binomischen Formeln?	435
Was hat das Faktorisieren mit Quadratzahlen zu tun?	435
Was ist der Vorteil der Quadratzahlen?	436
Steckt im Faktorisierer das Fermat-Verfahren?	437
Wie schließt der Faktorisierer aus, dass eine Zahl eine Quadratzahl ist?	438
Was haben die Ketten mit Teilen mit Rest zu tun?	439
Was sind die quadratischen Reste im 28er-System?	440
Auf welche Kettenglieder kommen Raupenbeläge?	441
Wie spielen die Ketten zusammen?	441
Bis zu welchem Zählerstand muss ich höchstens kurbeln?	442
Was ist Parallelisierung?	443
Wie oft liefert der Faktorisierer Fake-Kandidaten?	443
Kann ich beim großen Faktorisierer weitere Ketten ergänzen?	443
Was hat Faktorisieren mit Verschlüssen zu tun?	444
28.2 Ausblick	444
28.3 Bauanleitung.	445
Kleine Variante	445
Programmierung der kleinen Variante	447
Große Variante	449
Motor und Elektronik	455
Programmierung der großen Variante	459

Anhang A	463
Die Namen der Einzelteile	463
Anhang B	469
Bildnachweise	469