

Donald Estep

Angewandte Analysis in einer Unbekannten

Mit 211 Abbildungen

Übersetzt aus dem Englischen von der djs² GmbH,
unter Mitarbeit von Stefanie Thorns



Inhalt

Einführung	1
I Zahlen und Funktionen, Folgen und Grenzwerte	5
1 Mathematische Modellierungen	7
1.1 Das Modell von der Abendsuppe	8
1.2 Das Modell vom matschigen Hof	10
1.3 Mathematische Modellierungen	12
2 Natürliche Zahlen sind einfach nicht genug	15
2.1 Die natürlichen Zahlen	15
2.2 Das Unendliche oder: Gibt es eine größte natürliche Zahl?	18
2.3 Eine Kontroverse über die Menge der natürlichen Zahlen	19
2.4 Die Subtraktion und die ganzen Zahlen	21
2.5 Die Division und die rationalen Zahlen	24
2.6 Abstände und der Betrag	25
2.7 Die ganzen Zahlen im Computer	27
3 Die Unendlichkeit und die vollständige Induktion	31
3.1 Die Notwendigkeit der vollständigen Induktion	31
3.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion	33
3.3 Der Gebrauch der vollständigen Induktion	35
3.4 Ein Modell einer Insektenpopulation	36

4 Rationale Zahlen	41
4.1 Operationen mit rationalen Zahlen	42
4.2 Dezimaldarstellungen der rationalen Zahlen	45
4.3 Die Menge der rationalen Zahlen	49
4.4 Das Verhulst-Modell von Populationen	50
4.5 Ein Modell des chemischen Gleichgewichts	51
4.6 Der Zahlenstrahl rationaler Zahlen	52
5 Funktionen	57
5.1 Funktionen	57
5.2 Funktionen und Mengen	60
5.3 Die graphische Darstellung von ganzzahligen Funktionen	62
5.4 Die graphische Darstellung von Funktionen der rationalen Zahlen	65
6 Polynome	69
6.1 Polynome	69
6.2 Die Σ Notation für Summen	70
6.3 Arithmetik mit Polynomen	71
6.4 Die Gleichheit von Polynomen	75
6.5 Graphen von Polynomen	76
6.6 Stückweise polynomiale Funktionen	78
7 Funktionen, Funktionen und noch mehr Funktionen	81
7.1 Linearkombinationen von Funktionen	81
7.2 Die Multiplikation und die Division von Funktionen	84
7.3 Rationale Funktionen	87
7.4 Die Komposition von Funktionen	89
8 Lipschitz-Stetigkeit	93
8.1 Stetiges Verhalten und lineare Funktionen	94
8.2 Die Definition der Lipschitz-Stetigkeit	96
8.3 Beschränkte Mengen von Zahlen	99
8.4 Monome	100
8.5 Linearkombinationen von Funktionen	102
8.6 Beschränkte Funktionen	104
8.7 Produkte und Quotienten von Funktionen	105
8.8 Die Komposition von Funktionen	107
9 Folgen und Grenzwerte	111
9.1 Die erste Begegnung mit Folgen und Grenzwerten	112
9.2 Die mathematische Definition des Grenzwerts	113
9.3 Etwas Hintergrund zur Definition des Grenzwerts	119
9.4 Divergente Folgen	120
9.5 Unendliche Reihen	121

9.6 Grenzwerte sind eindeutig	124
9.7 Arithmetik mit den Folgen	125
9.8 Funktionen und Folgen	127
9.9 Folgen mit rationalen Elementen	130
9.10 Die Infinitesimalrechnung und die Berechnung von Grenzwerten	132
9.11 Die Computer–Darstellung von rationalen Zahlen	132
10 Wir lösen das Modell vom matschigen Hof	141
10.1 Rationale Zahlen sind einfach nicht genug	141
10.2 Unendliche nicht-periodische Dezimaldarstellungen	144
10.3 Der Bisektionsalgorithmus für das Modell vom matschigen Hof	145
10.4 Der Bisektionalgorithmus konvergiert	147
10.5 ... und der Grenzwert löst das Modell vom matschigen Hof .	149
11 Reelle Zahlen	153
11.1 Irrationale Zahlen	154
11.2 Arithmetik mit irrationalen Zahlen	156
11.3 Ungleichungen für irrationale Zahlen	159
11.4 Die reellen Zahlen	161
11.5 Bitte, oh bitte, lass die reellen Zahlen genug sein	162
11.6 Ein wenig Geschichte der reellen Zahlen	167
12 Funktionen reeller Zahlen	173
12.1 Funktionen einer reellen Variablen	173
12.2 Die Fortsetzung von Funktionen rationaler Zahlen	174
12.3 Graphen von Funktionen einer reellen Variablen	177
12.4 Grenzwerte einer Funktion einer reellen Variablen	179
13 Der Bisektionsalgorithmus	185
13.1 Der Bisektionsalgorithmus für allgemeine Nullstellenprobleme	185
13.2 Wir lösen das Modell des chemischen Gleichgewichts	187
13.3 Der Bisektionsalgorithmus konvergiert	189
13.4 Wann man den Bisektionsalgorithmus beendet	191
13.5 Potenzfunktionen	192
13.6 Die Berechnung von Nullstellen mit dem Dekasektionsalgorithmus	194
14 Inverse Funktionen	199
14.1 Eine geometrische Untersuchung	200
14.2 Eine analytische Untersuchung	204
15 Fixpunkte und kontrahierende Abbildungen	213
15.1 Das Modell vom Verkauf von Glückwunschkarten	214

15.2 Das Freizeit–Modell	216
15.3 Fixpunktprobleme und Nullstellenprobleme	217
15.4 Wir lösen das Modell vom Verkauf von Glückwunschkarten	220
15.5 Die Fixpunktiteration	222
15.6 Zur Konvergenz der Fixpunktiteration	224
15.7 Konvergenzraten	229
II Differenzial- und Integralrechnung	239
16 Die Linearisierung einer Funktion in einem Punkt	241
16.1 Die Ungenauigkeit der Lipschitz-Stetigkeit	241
16.2 Die Linearisierung in einem Punkt	245
16.3 Ein systematischer Ansatz	249
16.4 Die starke Differenzierbarkeit und die Glattheit	253
17 Wir analysieren das Verhalten eines Populations–Modells	257
17.1 Ein allgemeines Populations–Modell	257
17.2 Gleichgewichtspunkte und Stabilität	259
18 Interpretationen der Ableitung	265
18.1 Ein geometrisches Bild	265
18.2 Änderungsraten	269
18.3 Differenzierbarkeit und starke Differenzierbarkeit	270
19 Differenzierbarkeit auf Intervallen	273
19.1 Starke Differenzierbarkeit auf Intervallen	273
19.2 Gleichmäßige starke Differenzierbarkeit	279
19.3 Gleichmäßige starke Differenzierbarkeit und Glattheit	280
19.4 Geschlossene Intervalle und einseitige Linearisierung	281
19.5 Differenzierbarkeit auf Intervallen	284
20 Nützliche Eigenschaften der Ableitung	289
20.1 Linearkombinationen von Funktionen	289
20.2 Produkte von Funktionen	291
20.3 Die Komposition von Funktionen	293
20.4 Quotienten von Funktionen	296
20.5 Ableitungen von Ableitungen: Sturz in die Verzweiflung . .	297
21 Der Mittelwertsatz	301
21.1 Ein konstruktiver Beweis	303
21.2 Eine Anwendung auf die Monotonie	309
22 Ableitungen von inversen Funktionen	311
22.1 Die Lipschitz-Stetigkeit einer inversen Funktion	311

22.2 Die Differenzierbarkeit einer inversen Funktion	313
23 Modellierung mit Differenzialgleichungen	317
23.1 Newtons Bewegungsgesetz	318
23.2 Einsteins Bewegungsgesetz	320
23.3 Zur Darstellung von Differenzialgleichungen	321
23.4 Lösungen von Differenzialgleichungen	323
23.5 Eindeutigkeit von Lösungen	325
23.6 Wir lösen Galileos Modell eines frei fallenden Objektes	329
24 Unbestimmte Integration	335
24.1 Unbestimmte Integration	336
24.2 Das unbestimmte Integral	336
24.3 Fortgeschrittenes Rätselraten	338
24.4 Die Substitutionsmethode	339
24.5 Die Sprache der Differenziale	341
24.6 Die Methode der partiellen Integration	344
24.7 Bestimmte Integrale	345
25 Integration	351
25.1 Ein einfacher Fall	353
25.2 Ein erster Versuch zur Approximation	353
25.3 Wir approximieren die Lösung auf einem großen Intervall .	355
25.4 Gleichmäßige Cauchy–Folgen von Funktionen	360
25.5 Die Konvergenz der Integrationsapproximation	365
25.6 Der Grenzwert löst die Differenzialgleichung	369
25.7 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	371
26 Eigenschaften des Integrals	377
26.1 Linearität	377
26.2 Monotonie	378
26.3 Wir spielen mit den Grenzen	379
26.4 Mehr über bestimmte und unbestimmte Integrale	381
27 Anwendungsmöglichkeiten des Integrals	383
27.1 Die Fläche unter einer Kurve	384
27.2 Der Mittelwert einer Funktion	389
28 Raketenantriebe und der Logarithmus	395
28.1 Ein Modell eines Raketenantriebs	396
28.2 Definition und Graph des Logarithmus	399
28.3 Zwei wichtige Eigenschaften des Logarithmus	400
28.4 Irrationale Exponenten	402
28.5 Potenzfunktionen	403
28.6 Wechsel der Basis	404

28.7 Wir lösen das Modell des Raketenantriebs	405
28.8 Ableitungen und Integrale, in denen der Logarithmus vor- kommt	406
29 Die konstante relative Änderungsrate und die Exponentialfunktion	411
29.1 Modelle, in denen eine konstante relative Änderungsrate vor- kommt	411
29.2 Die Exponentialfunktion	414
29.3 Die Lösung des Modells für eine konstante relative Änderungsrate	416
29.4 Mehr über integrierende Faktoren	418
29.5 Allgemeine Exponentialfunktionen	420
29.6 Wachstumsraten der Exponentialfunktion und des Logarith- mus	421
29.7 Eine Rechtfertigung des kontinuierlichen Modells	423
30 Ein Masse–Feder–System und die trigonometrischen Funktionen	431
30.1 Das Hookesche Modell eines Masse–Feder–Systems	431
30.2 Die Glattheit der trigonometrischen Funktionen	433
30.3 Wir lösen das Modell für ein Masse–Feder–System	439
30.4 Inverse trigonometrische Funktionen	440
31 Die Fixpunktiteration und das Newton–Verfahren	451
31.1 Die Linearisierung und die Fixpunktiteration	452
31.2 Globale Konvergenz und lokales Verhalten	452
31.3 Hohe Konvergenzordnung	459
31.4 Das Newton–Verfahren	462
31.5 Einige Interpretationen und etwas Geschichte zum Newton– Verfahren	465
31.6 Was ist der Fehler in einer approximierten Nullstelle? . . .	467
31.7 Global konvergente Verfahren	470
31.8 Wenn gute Ableitungen schwierig zu finden sind	473
31.9 Unbeantwortete Fragen	475
Der Sumpf der Infinitesimalrechnung	481
III Sie möchten Analysis? Hier ist sie.	485
32 Definitionen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit	487
32.1 Eine allgemeine Definition der Stetigkeit	487
32.2 Eigenschaften stetiger Funktionen	489
32.3 Stetigkeit auf einem Intervall	490

32.4 Differenzierbarkeit und starke Differenzierbarkeit	495
32.5 Der Satz von Weierstraß und gleichmäßige Stetigkeit	498
32.6 Äquivalenzen zwischen Definitionen der Differenzierbarkeit .	505
33 Folgen von Funktionen	511
33.1 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit	514
33.2 Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit	515
33.3 Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit	519
33.4 Unbeantwortete Fragen	521
34 Erleichterte Integration	525
34.1 Stetige Funktionen	525
34.2 Allgemeine Gitter	530
34.3 Anwendung auf die Berechnung der Länge einer Kurve . .	536
35 Heikle Grenzwerte und hässliches Verhalten	543
35.1 Funktionen und Unendlichkeit	544
35.2 Die Regel von de L'Hôpital	547
35.3 Größenordnungen	553
36 Der Approximationssatz von Weierstraß	559
36.1 Die Binomialentwicklung	560
36.2 Das Gesetz der großen Zahlen	563
36.3 Das Stetigkeitsmaß	566
36.4 Die Bernstein-Polynome	568
36.5 Genauigkeit und Konvergenz	571
36.6 Offene Fragen	572
37 Das Taylor-Polynom	577
37.1 Eine quadratische Approximation	577
37.2 Die Taylor-Darstellung eines Polynoms	579
37.3 Das Taylor-Polynom für eine allgemeine Funktion	580
37.4 Der Fehler des Taylor-Polynoms	582
37.5 Eine andere Perspektive	586
37.6 Genauigkeit und Konvergenz	587
37.7 Offene Fragen	591
37.8 Zur Geschichte der Taylor-Polynome	591
38 Polynominterpolation	595
38.1 Existenz und Eindeutigkeit	596
38.2 Der Fehler eines Interpolationspolynoms	601
38.3 Genauigkeit und Konvergenz	602
38.4 Ein stückweises Interpolationspolynom	606
38.5 Offene Fragen	608
39 Nichtlineare Differenzialgleichungen	613

39.1 Eine Warnung	620
40 Die Picard–Iteration	623
40.1 Operatoren und Räume von Funktionen	624
40.2 Ein Fixpunktproblem für eine Differenzialgleichung	625
40.3 Der Banachsche Fixpunktsatz	627
40.4 Die Picard–Iteration	629
40.5 Offene Fragen	634
41 Das explizite Euler–Verfahren	639
41.1 Das explizite Euler–Verfahren	639
41.2 Gleichgradige Stetigkeit und der Satz von Arzela	643
41.3 Konvergenz des Euler–Verfahrens	649
41.4 Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten	654
41.5 Mehr über die Konvergenz des Euler–Verfahrens	656
41.6 Offene Fragen	657
Ein Fazit oder eine Einleitung?	663
Literatur	665
Index	667