

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>                              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Mehrkörpersysteme                              | 1         |
| 1.2      | Physikalische Grundlagen der Mehrkörperdynamik | 2         |
| 1.3      | Entwicklung der Mehrkörperdynamik              | 6         |
| 1.4      | Mehrkörperformalismen                          | 8         |
| 1.5      | Anwendungen von Mehrkörpersystemen             | 11        |
| 1.6      | Inhaltsübersicht                               | 16        |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen der Vektorrechnung</b>           | <b>21</b> |
| 2.1      | Skalare und Vektoren                           | 21        |
| 2.2      | Koordinaten von Vektoren                       | 21        |
| 2.3      | Rechenregeln für Vektoren                      | 23        |
| 2.4      | Transformation von Vektorkoordinaten           | 29        |
| 2.5      | Tensoren zweiter Stufe                         | 32        |
| <b>3</b> | <b>Grundlagen der Kinematik</b>                | <b>35</b> |
| 3.1      | Allgemeine Bewegung des starren Körpers        | 35        |
| 3.1.1    | Aufgabenstellung                               | 36        |
| 3.1.2    | Lage                                           | 37        |
| 3.1.3    | Geschwindigkeit, Bewegungswinder               | 38        |
| 3.1.4    | Drehmatrix und Winkelgeschwindigkeit           | 39        |
| 3.1.5    | Beschleunigung                                 | 40        |
| 3.1.6    | Beispiel zur Bewegung eines starren Körpers    | 41        |
| 3.1.7    | Sonderfälle der allgemeinen Bewegung           | 43        |
| 3.2      | Relativbewegungen starrer Körper               | 44        |
| 3.2.1    | Relative zeitliche Ableitung von Vektoren      | 44        |
| 3.2.2    | Zusammensetzung zweier Bewegungen              | 49        |
| 3.2.3    | Beispiel zur Zusammensetzung zweier Bewegungen | 52        |
| 3.2.4    | Umgekehrte Relativbewegung                     | 56        |
| 3.3      | Drehtensor                                     | 59        |
| 3.3.1    | Drehzeiger                                     | 59        |

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.2    | RODRIGUES-Gleichung . . . . .                                  | 60         |
| 3.3.3    | Passive und aktive Drehungen . . . . .                         | 62         |
| 3.3.4    | Drehzeiger aus gegebener Drehmatrix . . . . .                  | 63         |
| 3.3.5    | Beispiele für Drehungen . . . . .                              | 65         |
| 3.4      | Mehrfache Drehungen . . . . .                                  | 67         |
| 3.4.1    | Definition mehrfacher Drehungen durch Drehgelenke . . . . .    | 67         |
| 3.4.2    | Drehungen um die Ausgangsachsen . . . . .                      | 70         |
| 3.4.3    | Drehungen um die mitgedrehten Achsen . . . . .                 | 72         |
| 3.5      | Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit . . . . .                 | 74         |
| 3.5.1    | Infinitesimale Drehung und Winkelgeschwindigkeit . . . . .     | 74         |
| 3.5.2    | Kinematische Differentialgleichungen des Drehtensors . . . . . | 76         |
| 3.5.3    | Parametrierung von Drehungen . . . . .                         | 79         |
| 3.6      | KARDAN-Winkel . . . . .                                        | 80         |
| 3.6.1    | xyz-KARDAN-Winkel und Drehmatrix . . . . .                     | 80         |
| 3.6.2    | xyz-KARDAN-Winkel aus gegebener Drehmatrix . . . . .           | 82         |
| 3.6.3    | xyz-KARDAN-Winkel und Winkelgeschwindigkeit . . . . .          | 83         |
| 3.6.4    | Gegenüberstellung verschiedener Drehungsabfolgen . . . . .     | 85         |
| 3.7      | EULER-Parameter (Quaternionen) . . . . .                       | 89         |
| 3.7.1    | EULER-Parameter und Drehtensor . . . . .                       | 89         |
| 3.7.2    | EULER-Parameter aus gegebener Drehmatrix . . . . .             | 91         |
| 3.7.3    | EULER-Parameter als Quaternionen . . . . .                     | 92         |
| 3.7.4    | EULER-Parameter und mehrfache Drehungen . . . . .              | 93         |
| 3.7.5    | EULER-Parameter und Winkelgeschwindigkeit . . . . .            | 94         |
| 3.7.6    | Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit . . . . .                 | 97         |
| 3.8      | RODRIGUES-Vektor . . . . .                                     | 99         |
| 3.8.1    | RODRIGUES-Vektor und Drehtensor . . . . .                      | 101        |
| 3.8.2    | RODRIGUES-Vektor und Winkelgeschwindigkeit . . . . .           | 101        |
| 3.9      | Beispiele zur Parametrierung von Drehungen . . . . .           | 102        |
| 3.9.1    | Koordinaten einer gegebenen Drehung . . . . .                  | 102        |
| 3.9.2    | Kinematische Differentialgleichungen . . . . .                 | 104        |
| <b>4</b> | <b>Grundlagen der Dynamik . . . . .</b>                        | <b>107</b> |
| 4.1      | Impuls und Drall . . . . .                                     | 107        |
| 4.1.1    | Impuls . . . . .                                               | 108        |
| 4.1.2    | Drall (Drehimpuls, Impulsmoment) . . . . .                     | 108        |
| 4.2      | Schwerpunktsatz und Drallsatz . . . . .                        | 110        |
| 4.2.1    | Impulssatz und Schwerpunktsatz . . . . .                       | 110        |
| 4.2.2    | Drallsatz (Momentensatz) . . . . .                             | 111        |
| 4.3      | Impuls und Drall des starren Körpers . . . . .                 | 113        |
| 4.3.1    | Masse und Massenmittelpunkt . . . . .                          | 113        |
| 4.3.2    | Impuls des starren Körpers . . . . .                           | 114        |
| 4.3.3    | Drall des starren Körpers . . . . .                            | 114        |

|       |                                                       |     |
|-------|-------------------------------------------------------|-----|
| 4.4   | Trägheitstensor                                       | 115 |
| 4.4.1 | Eigenschaften des Trägheitstensors                    | 116 |
| 4.4.2 | Parallelverschiebung des Bezugssystems                | 117 |
| 4.4.3 | Drehung des Bezugssystems                             | 118 |
| 4.4.4 | Hauptachsensystem                                     | 118 |
| 4.4.5 | Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders        | 120 |
| 4.5   | Impulssatz und Drallsatz für den starren Körper       | 122 |
| 4.5.1 | Impulssatz                                            | 122 |
| 4.5.2 | Drallsatz                                             | 122 |
| 4.5.3 | D’ALEMBERTsche Trägheitskräfte                        | 124 |
| 4.6   | Arbeit und Energie                                    | 125 |
| 4.6.1 | Arbeitssatz                                           | 125 |
| 4.6.2 | Konservative Kräfte, potentielle Energie, Energiesatz | 126 |
| 4.6.3 | Kinetische Energie des starren Körpers                | 128 |
| 4.7   | Kraftwirkungen von Rotoren                            | 129 |
| 4.8   | Dynamik von Kreisel                                   | 132 |
| 4.8.1 | Momentenfreier Kreisel                                | 132 |
| 4.8.2 | Schwerer symmetrischer Kreisel                        | 137 |
| 5     | <b>Holonome Massenpunktsysteme</b>                    | 141 |
| 5.1   | Klassifizierung von Bindungen                         | 141 |
| 5.1.1 | Skleronome und rheonome holonome Bindungen            | 142 |
| 5.1.2 | Zweiseitige und einseitige holonome Bindungen         | 145 |
| 5.2   | Holonome Bindungen in Massenpunktsystemen             | 146 |
| 5.2.1 | Implizite holonome Bindungen                          | 146 |
| 5.2.2 | Freiheitsgrad und Minimalkoordinaten                  | 149 |
| 5.2.3 | Explizite holonome Bindungen                          | 150 |
| 5.3   | Impulssätze                                           | 154 |
| 5.4   | Eingeprägte Kräfte                                    | 155 |
| 5.4.1 | Ideale eingeprägte Kräfte                             | 155 |
| 5.4.2 | Nichtideale Reibungskräfte                            | 157 |
| 5.5   | Reaktionskräfte                                       | 158 |
| 5.5.1 | Prinzip von D’ALEMBERT-LAGRANGE                       | 159 |
| 5.5.2 | Prinzip von JOURDAIN                                  | 162 |
| 5.5.3 | Explizite Reaktionsbedingungen                        | 163 |
| 5.5.4 | Implizite Reaktionsbedingungen                        | 165 |
| 5.6   | Bewegungsgleichungen von Massenpunktsystemen          | 165 |
| 5.6.1 | Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten            | 166 |
| 5.6.2 | Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten            | 170 |
| 5.7   | Beispiele holonomer Massenpunktsysteme                | 173 |
| 5.7.1 | Doppeltes Massenpunktpendel                           | 174 |
| 5.7.2 | Ebenes Schubkurbelgetriebe                            | 179 |

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 5.7.3    | Massenpunkt auf rotierendem Ring . . . . .                     | 184        |
| 5.8      | Weitere Methoden der analytischen Dynamik . . . . .            | 188        |
| 5.8.1    | Prinzip von GAUSS . . . . .                                    | 189        |
| 5.8.2    | LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art . . . . .                     | 191        |
| 5.8.3    | Kanonische Gleichungen von HAMILTON . . . . .                  | 194        |
| 5.9      | Zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen . . . . .      | 198        |
| 5.9.1    | Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .                  | 198        |
| 5.9.2    | Differential-algebraische Gleichungen . . . . .                | 201        |
| 5.9.3    | Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .                       | 204        |
| <b>6</b> | <b>Holonome ebene Mehrkörpersysteme . . . . .</b>              | <b>207</b> |
| 6.1      | Bewegungsgrößen ebener Mehrkörpersysteme . . . . .             | 207        |
| 6.2      | Holonome Bindungen in ebenen Mehrkörpersystemen . . . . .      | 208        |
| 6.2.1    | Implizite holonome Bindungen . . . . .                         | 208        |
| 6.2.2    | Explizite holonome Bindungen . . . . .                         | 210        |
| 6.3      | Impulssätze und Drallsätze . . . . .                           | 213        |
| 6.4      | Eingeprägte Kräfte und Momente . . . . .                       | 214        |
| 6.5      | Reaktionskräfte und Reaktionsmomente . . . . .                 | 216        |
| 6.5.1    | Prinzip von JOURDAIN für ebene Mehrkörpersysteme . . . . .     | 216        |
| 6.5.2    | Explizite Reaktionsbedingungen . . . . .                       | 218        |
| 6.5.3    | Implizite Reaktionsbedingungen . . . . .                       | 218        |
| 6.6      | Bewegungsgleichungen ebener Mehrkörpersysteme . . . . .        | 219        |
| 6.6.1    | Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .           | 219        |
| 6.6.2    | Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .           | 220        |
| 6.7      | Beispiele ebener Mehrkörpersysteme . . . . .                   | 224        |
| 6.7.1    | Doppeltes Körperpendel . . . . .                               | 224        |
| 6.7.2    | Rollpendel . . . . .                                           | 229        |
| <b>7</b> | <b>Holonome räumliche Mehrkörpersysteme . . . . .</b>          | <b>233</b> |
| 7.1      | Bewegungsgrößen räumlicher Mehrkörpersysteme . . . . .         | 233        |
| 7.2      | Holonome Bindungen in räumlichen Mehrkörpersystemen . . . . .  | 235        |
| 7.2.1    | Implizite holonome Bindungen . . . . .                         | 236        |
| 7.2.2    | Explizite holonome Bindungen . . . . .                         | 238        |
| 7.3      | Impulssätze und Drallsätze . . . . .                           | 241        |
| 7.4      | Eingeprägte Kräfte und Momente . . . . .                       | 242        |
| 7.5      | Reaktionskräfte und Reaktionsmomente . . . . .                 | 243        |
| 7.5.1    | Prinzip von JOURDAIN für räumliche Mehrkörpersysteme . . . . . | 243        |
| 7.5.2    | Explizite Reaktionsbedingungen . . . . .                       | 244        |
| 7.5.3    | Implizite Reaktionsbedingungen . . . . .                       | 244        |
| 7.6      | Bewegungsgleichungen räumlicher Mehrkörpersysteme . . . . .    | 245        |

|          |                                                           |            |
|----------|-----------------------------------------------------------|------------|
| 7.6.2    | Bewegungsgleichungen in Minimalform . . . . .             | 247        |
| 7.7      | Beispiele räumlicher Mehrkörpersysteme . . . . .          | 250        |
| 7.7.1    | Schwerer Kreisel mit Fixpunktlagerung . . . . .           | 250        |
| 7.7.2    | Roboter mit zwei Drehgelenken . . . . .                   | 257        |
| <b>8</b> | <b>Nichtholonome Systeme . . . . .</b>                    | <b>265</b> |
| 8.1      | Kinematik nichtholonomer Systeme . . . . .                | 266        |
| 8.1.1    | Implizite nichtholonome Bindungen . . . . .               | 266        |
| 8.1.2    | Freiheitsgrad nichtholonomer Systeme . . . . .            | 268        |
| 8.1.3    | Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten . . . . . | 268        |
| 8.1.4    | Explizite nichtholonome Bindungen . . . . .               | 269        |
| 8.2      | Dynamik nichtholonomer Systeme . . . . .                  | 270        |
| 8.2.1    | Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .      | 271        |
| 8.2.2    | Bewegungsgleichungen in Minimalform . . . . .             | 272        |
| 8.3      | Auf einer rotierenden Ebene rollende Kugel . . . . .      | 276        |
| 8.3.1    | Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .      | 276        |
| 8.3.2    | Bewegungsgleichungen in Minimalform . . . . .             | 280        |
| 8.4      | Integrierbarkeit kinematischer Bindungen . . . . .        | 283        |
| 8.4.1    | Wagen mit zwei Rädern (Kufe) . . . . .                    | 284        |
| 8.4.2    | Integrierbarkeitsbedingungen . . . . .                    | 287        |
| 8.4.3    | Anwendungen der Integrierbarkeitsbedingungen . . . . .    | 290        |
| <b>9</b> | <b>Bindungen in Mehrkörpersystemen . . . . .</b>          | <b>299</b> |
| 9.1      | Gelenke in Mehrkörpersystemen . . . . .                   | 299        |
| 9.1.1    | Gelenke mit holonomen skleronomen Bindungen . . . . .     | 300        |
| 9.1.2    | Gelenke mit holonomen rheonomen Bindungen . . . . .       | 302        |
| 9.1.3    | Zur Modellierung von Gelenken . . . . .                   | 302        |
| 9.2      | Klassifizierungen von Mehrkörpersystemen . . . . .        | 305        |
| 9.2.1    | Topologische Klassifizierung . . . . .                    | 305        |
| 9.2.2    | Kinematische Klassifizierung . . . . .                    | 307        |
| 9.3      | Freiheitsgrad von Mehrkörpersystemen . . . . .            | 308        |
| 9.3.1    | Freiheitsgrad räumlicher Mehrkörpersysteme . . . . .      | 308        |
| 9.3.2    | Freiheitsgrad überbestimmter Mehrkörpersysteme . . . . .  | 313        |
| 9.3.3    | Freiheitsgrad ebener und sphärischer Systeme . . . . .    | 314        |
| 9.4      | Implizite holonome Bindungen von Gelenken . . . . .       | 315        |
| 9.4.1    | Implizite Bindungen eines allgemeinen Gelenks . . . . .   | 316        |
| 9.4.2    | Elementare implizite Bindungen . . . . .                  | 317        |
| 9.4.3    | Implizite Bindungen des Drehgelenks . . . . .             | 321        |
| 9.5      | Explizite holonome Bindungen von Gelenken . . . . .       | 322        |
| 9.5.1    | Explizite Bindungen eines allgemeinen Gelenks . . . . .   | 322        |
| 9.5.2    | Explizite Bindungen des Drehgelenks . . . . .             | 326        |
| 9.5.3    | Explizite Bindungen des Schubgelenks . . . . .            | 327        |

|           |                                                                          |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.5.4     | Explizite Bindungen des Kugelgelenks . . . . .                           | 329        |
| 9.6       | Reaktionsbedingungen für Gelenke . . . . .                               | 331        |
| 9.6.1     | Explizite Reaktionsbedingungen . . . . .                                 | 331        |
| 9.6.2     | Implizite Reaktionsbedingungen . . . . .                                 | 332        |
| 9.6.3     | Reaktionsbedingungen für das Drehgelenk . . . . .                        | 333        |
| 9.7       | Verwendung der Bindungen in Bewegungsgleichungen . . . . .               | 334        |
| <b>10</b> | <b>Offene Mehrkörpersysteme . . . . .</b>                                | <b>339</b> |
| 10.1      | Topologie offener Mehrkörpersysteme . . . . .                            | 339        |
| 10.2      | Kinematik offener Mehrkörpersysteme . . . . .                            | 341        |
| 10.2.1    | Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten . . . . .                | 342        |
| 10.2.2    | Explizite Bindungen in einer Kettenstruktur . . . . .                    | 343        |
| 10.2.3    | Kettenstruktur mit Standardgelenken . . . . .                            | 349        |
| 10.2.4    | Explizite Bindungen in einer Baumstruktur . . . . .                      | 353        |
| 10.3      | Dynamik offener Mehrkörpersysteme . . . . .                              | 355        |
| 10.3.1    | Implizite Reaktionsbedingungen für offene<br>Mehrkörpersysteme . . . . . | 355        |
| 10.3.2    | Impuls- und Drallsätze . . . . .                                         | 360        |
| 10.4      | Bewegungsgleichungen offener Mehrkörpersysteme . . . . .                 | 362        |
| 10.5      | Nichtrekursiver Formalismus für offene Mehrkörpersysteme . . . . .       | 364        |
| 10.6      | Rekursiver Formalismus für offene Mehrkörpersysteme . . . . .            | 366        |
| 10.6.1    | Rekursive Lösung für Systeme mit Kettenstruktur . . . . .                | 366        |
| 10.6.2    | Rekursive Lösung für Systeme mit Baumstruktur . . . . .                  | 370        |
| 10.7      | Knickarm-Roboter . . . . .                                               | 371        |
| <b>11</b> | <b>Geschlossene Mehrkörpersysteme . . . . .</b>                          | <b>379</b> |
| 11.1      | Kinematik einer einzelnen Mehrkörperschleife . . . . .                   | 379        |
| 11.1.1    | Implizite Schließbedingungen . . . . .                                   | 380        |
| 11.1.2    | Explizite Schließbedingungen . . . . .                                   | 385        |
| 11.1.3    | Kinematik eines ebenen Gelenkvierecks . . . . .                          | 389        |
| 11.2      | Kinematik mehrschleifiger Systeme . . . . .                              | 399        |
| 11.2.1    | Primäre Gelenkkoordinaten . . . . .                                      | 399        |
| 11.2.2    | Implizite Schließbedingungen . . . . .                                   | 400        |
| 11.2.3    | Zur Definition unabhängiger Schleifen . . . . .                          | 404        |
| 11.2.4    | Zusätzliche kinematische Ketten . . . . .                                | 406        |
| 11.2.5    | Explizite Schließbedingungen . . . . .                                   | 407        |
| 11.3      | Dynamik geschlossener Mehrkörpersysteme . . . . .                        | 409        |
| 11.3.1    | Sekundäre Reaktionskraftwinder . . . . .                                 | 409        |
| 11.3.2    | Impuls- und Drallsätze . . . . .                                         | 411        |
| 11.4      | Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten . . . . .         | 411        |
| 11.4.1    | Nichtrekursiver Formalismus für geschlossene MKS . . . . .               | 413        |
| 11.4.2    | Rekursiver Formalismus für geschlossene MKS . . . . .                    | 415        |

|                                             |                                                              |            |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------|
| 11.5                                        | Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .         | 420        |
| 11.5.1                                      | Zustandsgleichungen . . . . .                                | 420        |
| 11.5.2                                      | Minimalform der Bewegungsgleichungen . . . . .               | 421        |
| 11.6                                        | Dynamik eines ebenen Schubkurbelgetriebes . . . . .          | 423        |
| 11.6.1                                      | Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten . . . . . | 423        |
| 11.6.2                                      | Bewegungsgleichungen in Minimalform . . . . .                | 426        |
| 11.7                                        | Dynamik eines räumlichen Koppelgetriebes . . . . .           | 427        |
| 11.7.1                                      | Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten . . . . . | 428        |
| 11.7.2                                      | Bewegungsgleichungen in Minimalform . . . . .                | 432        |
| 11.8                                        | Dynamik eines Parallelroboters . . . . .                     | 436        |
| 11.8.1                                      | Mehrkörpermodelle ohne redundante Bindungen . . . . .        | 437        |
| 11.8.2                                      | Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten . . . . . | 440        |
| <b>A Mathematische Grundlagen . . . . .</b> |                                                              | <b>447</b> |
| <b>Literatur . . . . .</b>                  |                                                              | <b>457</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis . . . . .</b>       |                                                              | <b>463</b> |