

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I Grundbegriffe der Mathematik und Algebraische Strukturen

<b>1</b>	<b>Mathematische Grundbegriffe</b>	3
1.1	Logische Zeichen	3
1.2	Elemente der Mengenlehre	4
1.3	Relationen	15
1.4	Korrespondenzen, Abbildungen und Verknüpfungen	21
1.5	Mächtigkeiten, Kardinalzahlen	27
1.6	Boolesche Funktionen und Prädikate	35
1.7	Graphen	51
<b>2</b>	<b>Klassische algebraische Strukturen</b>	59
2.1	Halbgruppen	60
2.2	Gruppen	66
2.3	Ringe und Körper	82
2.4	Verbände und Boolesche Algebren	93

## Teil II Lineare Algebra und analytische Geometrie

<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme, Determinanten und Matrizen</b>	107
3.1	Determinanten	108
3.2	Matrizen	126
3.3	Rang von Matrizen	139
3.4	Lösbarkeitskriterien und Lösungsverfahren für LGS	143
<b>4</b>	<b>Vektorräume über einem Körper <math>K</math></b>	157
4.1	Die Definition eines Vektorraums über $K$ , Beispiele	157
4.2	Untervektorräume	161
4.3	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	164
4.4	Basen	166

## XVI Inhaltsverzeichnis

4.5	Lineare Unabhängigkeit und Basen über einem Untervektorraum . . . . .	174
4.6	Dimensionssätze, Isomorphie . . . . .	178
4.7	Koordinaten, Basistransformationen . . . . .	180
4.8	Anwendungen für Vektoren aus $\vec{V}_2$ bzw. $\vec{V}_3$ . . . . .	183
<b>5</b>	<b>Affine Räume . . . . .</b>	<b>189</b>
5.1	Die Definition eines affinen Raumes, Beispiele . . . . .	189
5.2	Koordinaten und Koordinatensysteme . . . . .	191
5.3	Affine Unterräume . . . . .	192
5.4	Schnitt und Verbindung affiner Räume . . . . .	196
5.5	Parallele affine Unterräume . . . . .	197
<b>6</b>	<b>Vektorräume mit Skalarprodukt (unitäre und euklidische VRe) . . . . .</b>	<b>199</b>
6.1	Das Skalarprodukt in $\vec{V}_2$ bzw. $\vec{V}_3$ . . . . .	199
6.2	Das Skalarprodukt in Vektorräumen über den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ . . . . .	210
6.3	Norm (Betrag) von Vektoren . . . . .	218
6.4	Winkel zwischen Vektoren (in euklidischen Vektorräumen) . . . . .	221
6.5	Orthogonalität . . . . .	221
6.6	Das Vektorprodukt . . . . .	231
<b>7</b>	<b>Euklidische und unitäre affine Punkträume . . . . .</b>	<b>241</b>
7.1	Abstandsmessung . . . . .	241
7.2	Winkel- und Volumenmessung in euklidischen Punkträumen . . . . .	244
7.3	Koordinatentransformationen in kartesischen Koordinatensystemen . . . . .	245
<b>8</b>	<b>Eigenwerte, Eigenvektoren und Normalformen von Matrizen . . . . .</b>	<b>253</b>
8.1	Motivation, Grundbegriffe . . . . .	253
8.2	Eigenwerte von Matrizen und Nullstellen von Polynomen . . . . .	259
8.3	Verallgemeinerte Eigenräume . . . . .	270
8.4	Überführung von symmetrischen Matrizen in Diagonalgestalt . . . . .	279
8.5	Jordansche Normalformen . . . . .	282
<b>9</b>	<b>Hyperflächen 2. Ordnung . . . . .</b>	<b>297</b>
9.1	Grundbegriffe . . . . .	297
9.2	Hauptachsentransformation (Beweis von Satz 9.1.1) . . . . .	300
9.3	Klassifikation der Kurven 2. Ordnung . . . . .	316
9.4	Klassifikation der Flächen 2. Ordnung . . . . .	323

<b>10 Lineare Abbildungen</b>	329
10.1 Allgemeines über lineare Abbildungen	329
10.2 Adjungierte Abbildungen	339
10.3 Normale Abbildungen	341
10.4 Selbstadjungierte und antiselbstadjungierte Abbildungen	344
10.5 Unitäre und orthogonale Abbildungen, Isometrien	345
10.6 Normalformen linearer Abbildungen	346
10.7 Gruppen aus linearen Abbildungen	348
<b>11 Affine Abbildungen</b>	351
11.1 Allgemeines über affine Abbildungen	351
11.2 Gruppen gewisser affiner Abbildungen	354
11.3 Einige Invarianten affiner Abbildungen	355
 <b>Teil III Numerische Algebra und Kombinatorik</b>	
<b>12 Einführung in die Numerische Mathematik</b>	361
12.1 Fehlertypen	362
12.2 Fehlerfortpflanzung bei differenzierbaren Funktionen	363
12.3 Maschinenzahlen, Rundungsfehler	366
12.4 Intervallarithmetik	368
<b>13 Gleichungsauflösung</b>	373
13.1 Problemstellung, geometrische Deutung	373
13.2 Der Banachsche Fixpunktsatz	375
13.3 Das Newton-Verfahren, die Regula falsi	379
13.4 Polynomgleichungen	384
13.4.1 Abschätzungen für Polynomnullstellen	384
13.4.2 Das Horner-Schema und das zweizeilige Horner-Schema	385
13.4.3 Verfahren zur Nullstellenberechnung von $p_m$	388
<b>14 Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung</b>	391
14.1 Der Gauß-Algorithmus (mit Pivotisierung)	392
14.2 Vektor- und Matrixnormen	394
14.3 Die Kondition von LGS	397
14.4 Elementare Iterationsverfahren	400
14.4.1 Das Jacobi-Verfahren	400
14.4.2 Das Gauß-Seidel-Verfahren	403
14.4.3 Konvergenzbedingungen	405
14.5 Projektionsverfahren	407
14.5.1 Grundidee der Projektionsverfahren	407
14.5.2 Projektion auf Hyperebenen	409
14.5.3 Gradientenverfahren	410

## XVIII Inhaltsverzeichnis

<b>15 Interpolation .....</b>	415
15.1 Einführung .....	415
15.2 Interpolation mit Polynomen .....	416
<b>16 Grundlagen der Kombinatorik .....</b>	421
16.1 Grundregeln des Abzählens .....	422
16.2 Permutationen, Kombinationen und Variationen .....	422
16.2.1 Permutationen (Anordnungen) von $M$ .....	422
16.2.2 Permutationen mit Wiederholung .....	423
16.2.3 Variationen mit Wiederholung .....	423
16.2.4 Variationen ohne Wiederholung .....	424
16.2.5 Kombinationen ohne Wiederholung .....	424
16.2.6 Kombinationen mit Wiederholung .....	425
16.2.7 Einige Beispiele für Anwendungen obiger Formeln .....	426
16.3 Das Prinzip der Inklusion-Exklusion .....	428
16.4 Mächtigkeiten von einigen Abbildungsmengen .....	431
16.5 Lineare Rekursionsgleichungen .....	432
<b>Teil IV Übungsaufgaben</b>	
<b>17 Übungsaufgaben zum Teil I .....</b>	443
17.1 Aufgaben zum Kapitel 1 .....	443
17.2 Aufgaben zum Kapitel 2 .....	454
<b>18 Übungsaufgaben zum Teil II .....</b>	461
18.1 Aufgaben zum Kapitel 3 .....	461
18.2 Aufgaben zum Kapitel 4 .....	466
18.3 Aufgaben zum Kapitel 5 .....	468
18.4 Aufgaben zum Kapitel 6 .....	469
18.5 Aufgaben zum Kapitel 7 .....	472
18.6 Aufgaben zum Kapitel 8 .....	473
18.7 Aufgaben zum Kapitel 9 .....	475
18.8 Aufgaben zum Kapitel 10 .....	477
18.9 Aufgaben zum Kapitel 11 .....	478
<b>19 Übungsaufgaben zum Teil III .....</b>	481
19.1 Aufgaben zum Kapitel 12 .....	481
19.2 Aufgaben zum Kapitel 13 .....	482
19.3 Aufgaben zum Kapitel 14 .....	483
19.4 Aufgaben zum Kapitel 15 .....	485
19.5 Aufgaben zum Kapitel 16 .....	487
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	491

<b>Glossar .....</b>	497
<b>Index .....</b>	503