

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	1
	Guido Pinkernell, Frank Reinhold, Florian Schacht und Daniel Walter	
<b>2</b>	<b>Mathematiklehren und -lernen digital – Theorien, Modelle, Konzepte</b>	7
	Angelika Bikner-Ahsbahs	
2.1	Einleitung	8
2.2	Zeichenproduktion mit mathematischen Werkzeugen	9
2.2.1	Zur Semiotik von Charles Sanders Peirce	10
2.2.2	Theorie semiotischer Vermittlung (Theorie of Semiotic Mediation)	12
2.3	SAMR – ein Ordnungsrahmen	15
2.3.1	Übersetzen traditioneller Aktivität (Substitution)	16
2.3.2	Erweiterung technologischer Möglichkeiten (Augmentation)	17
2.3.3	Veränderung durch technologische Mittel (Modification)	18
2.3.4	Erneuerung traditioneller Aktivitäten (Redefinition)	21
2.4	Vom Artefakt zum Instrument – ein Lehr-Lern-Prozess	23
2.4.1	Instrumentale Genese – Wie ein Artefakt zum Instrument wird	23
2.4.2	Das Konzept der Praxeologie – instrumentierte Techniken	26
2.5	Theoretisierung neuer digitaler Phänomene	28
2.5.1	Embodied Design – der Körper lernt mit	28
2.5.2	Mathematische Internet-Memes: eine hybride Darstellungsform	30
2.6	Rückblickende Einordnung	32
	Literatur	34
<b>3</b>	<b>Psychologische Perspektiven auf die Gestaltung digitaler Medien für das Lehren und Lernen von Mathematik</b>	37
	Katharina Scheiter, Manuel Ninaus und Korbinian Moeller	
3.1	Einleitung	38

---

3.2	Gestaltung von Lernmedien vor dem Hintergrund universeller Informationsverarbeitungsprozesse . . . . .	38
3.2.1	Lehr-lern-psychologische Annahmen zur Informationsverarbeitung . . . . .	38
3.2.2	Gestaltung von Lernmedien . . . . .	42
3.2.3	Anwendungsbeispiel: Kognitive Tutoren . . . . .	45
3.3	Gestaltung von Lernmedien unter Berücksichtigung domänenpezifischer kognitiver Prozesse . . . . .	47
3.3.1	Domänenpezifische kognitive Prozesse und Repräsentationen . . . . .	47
3.3.2	Gestaltung von Lernmedien: <i>Semideus</i> als ein Anwendungsbeispiel zur Berücksichtigung domänenpezifischer Repräsentationen . . . . .	48
3.4	Fazit . . . . .	54
	Literatur . . . . .	55
4	<b>Elemente der Professionalität von Lehrkräften in Bezug auf digitales Lernen und Lehren von Mathematik</b> . . . . .	59
	Anje Ostermann, Mina Ghomi, Andreas Mühling und Anke Lindmeier	
4.1	Einleitung . . . . .	60
4.2	Theoretischer Hintergrund . . . . .	61
4.2.1	Digitale Grundbildung als Fundament digitaler Professionalität (Professionsunspezifische digitale Kompetenzen) . . . . .	62
4.2.2	Wissen als Kern einer digitalen Professionalität von Mathematiklehrkräften . . . . .	63
4.3	Wissen wirksam werden lassen – Handlungskompetenz . . . . .	68
4.3.1	Empirische Befunde im Zusammenhang mit der digitalen Professionalität von Lehrkräften . . . . .	75
4.4	Vergleich vorliegender Rahmenmodelle . . . . .	77
4.5	Diskussion und Ausblick . . . . .	83
	Literatur . . . . .	85
5	<b>Digitale Mathematikwerkzeuge</b> . . . . .	91
	Bärbel Barzel und Marcel Klinger	
5.1	Digitale Werkzeuge aus historischer Perspektive . . . . .	92
5.2	Charakterisierung digitaler Werkzeuge . . . . .	93
5.3	Unterrichtliche Einbindung . . . . .	97
5.4	Situation in Prüfungen . . . . .	101
5.5	Politische Herausforderungen . . . . .	103
5.6	Quo vadis – digitale Werkzeuge und das Jahr 2020+ . . . . .	104
	Literatur . . . . .	105

---

<b>6</b>	<b>Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis</b>	109
	Jürgen Roth	
6.1	Begriffsklärung und Ziele der Nutzung digitaler Lernumgebungen	110
6.1.1	Was kennzeichnet eine digitale Lernumgebung?	110
6.1.2	Beziehung zwischen digitalen Lernumgebungen und digitalen Werkzeugen	113
6.1.3	Ziele der Nutzung digitaler Lernumgebungen	117
6.2	Typen digitaler Lernumgebungen	118
6.2.1	Lernpfade	119
6.2.2	Digitale Schulbücher	123
6.3	Forschungsergebnisse zur Wirkung digitaler Lernumgebungen	126
	Literatur	133
<b>7</b>	<b>Virtuelle Welten im Mathematikunterricht – Lernumgebungen in erweiterter Realität</b>	137
	Lena Florian und Ulrich Kortenkamp	
7.1	Erweiterte Realitäten – Wie weit eigentlich?	138
7.2	Systeme und Technologien	140
7.3	MR-Anwendungen für den Mathematikunterricht	143
7.3.1	NeoTrie VR	145
7.3.2	CubelingVR	146
7.3.3	CalcFlow	146
7.3.4	Tilt Brush und SculptVR	147
7.3.5	GeogebraAR	148
7.3.6	Autor:innenwerkzeuge	148
7.3.7	Einordnung	149
7.4	MR-Technologie im Mathematikunterricht	153
7.5	Ausblick	158
	Literatur	159
<b>8</b>	<b>Der Beitrag digitaler Werkzeuge zur Entwicklung des Funktionsbegriffs und des funktionalen Denkens</b>	163
	Stephan Michael Günster und Hans-Georg Weigand	
8.1	Zum Lernen des Funktionsbegriffs	164
8.2	Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff	165
8.3	Funktionales Denken	167
8.4	Das operative Prinzip und das funktionale Denken	169
8.5	Beispiele für die Entwicklung des funktionalen Denkens mit Hilfe digitaler Werkzeuge	171
8.5.1	Funktionen – qualitativ betrachtet	171
8.5.2	Funktionen dynamisch analysieren	171
8.5.3	Problemlösen mit (linearen) Funktionen	176
8.5.4	Werte annähern – Regressionskurven	177

8.5.5	Mit Funktionen operieren. . . . .	178
8.5.6	Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	178
8.5.7	Entdeckungen mit Exponentialfunktionen. . . . .	181
8.5.8	Lineare Iterationsfunktionen . . . . .	183
8.6	Folgerungen . . . . .	186
	Literatur. . . . .	186
<b>9</b>	<b>Tablet-Apps zur Unterstützung des Erwerbs arithmetischer Kompetenzen</b> . . . . .	189
	Silke Ladel	
9.1	Einleitung. . . . .	189
9.2	Zahlen . . . . .	190
	9.2.1 Zahldarstellungen. . . . .	190
	9.2.2 Zahlaspekte . . . . .	193
9.3	Rechenoperationen. . . . .	200
	9.3.1 Addition und Subtraktion. . . . .	201
	9.3.2 Multiplikation. . . . .	203
9.4	Virtuelle Arbeitsmaterialien. . . . .	206
9.5	Schlusswort . . . . .	208
	Literatur. . . . .	209
<b>10</b>	<b>Algebra: CAS und mehr</b> . . . . .	213
	Thomas Janßen	
10.1	Der Algebra mit digitalen Werkzeugen Bedeutung geben. . . . .	213
10.2	CAS und CAS-basierte Apps. . . . .	215
	10.2.1 Allgemeine Erkenntnisse zum Einsatz von Computeralgebra systemen . . . . .	215
	10.2.2 Elementare Algebra mit CAS. . . . .	217
	10.2.3 Lineare Algebra mit CAS. . . . .	220
10.3	Mathematische Visualisierungen algebraischer Ausdrücke. . . . .	221
	10.3.1 Visualisierungen von Termen und Gleichungen . . . . .	221
	10.3.2 Visualisierungen in der linearen Algebra. . . . .	223
10.4	Didaktisierungen . . . . .	225
	10.4.1 Dynamische Terme und Gleichungen auf dem Zahlenstrahl: <i>FeliXID</i> . . . . .	225
	10.4.2 Terme mit Zahlen und Variablen umformen: <i>Grid Algebra</i> . . . . .	226
	10.4.3 Mit virtuellen Manipulatives und Smart Objects Gleichungen lösen . . . . .	228
10.5	Ein Fazit für die Praxis. . . . .	232
10.6	Ein Ausblick für Forschung und Entwicklung. . . . .	234
	Literatur. . . . .	235

---

<b>11 Geometrie und Digitalität</b> .....	239
Hans-Jürgen Elschenbroich und Rudolf Sträßer	
11.1 Geometrie – Was ist das? .....	241
11.2 Was ist dynamische Geometrie? .....	243
11.2.1 Dynamische Geometrie-Software .....	245
11.2.2 Zeichenblattgeometrie und DGS-Geometrie .....	247
11.2.3 Dynamische Geometrie-Software <i>in der Schule</i> .....	249
11.3 Beweisen – mit und ohne DGS .....	250
11.3.1 Beweisen in der Schule .....	251
11.3.2 Sehen und Einsehen beim DGS Einsatz .....	251
11.3.3 Sätze mit DGS entdecken oder wiederentdecken .....	255
11.3.4 Beweise schrittweise präsentieren und durchdenken .....	255
11.4 Beziehungen zu anderen mathematischen Unterrichtsgegenständen .....	255
11.4.1 Algorithmen und Formeln .....	256
11.4.2 Kinematik und geometrischer Ort .....	256
11.4.3 Funktionen und Gleichungen .....	258
11.5 Raum und Form in zwei oder drei Dimensionen .....	258
11.5.1 Raumvorstellung und Raumanschauung .....	259
11.5.2 Raumdarstellung und Raumgeometrie .....	261
11.5.3 Besonderheiten räumlicher dynamischer Geometrie-Software (RDGS) .....	264
11.5.4 RDGS in der Schule .....	266
11.5.5 Erzeugen von räumlichen Objekten .....	267
11.5.6 Ebene Sicht auf Körper .....	270
11.5.7 Vektorielle Geometrie .....	271
11.5.8 3D Druck und AR .....	272
11.6 Zum Schluss .....	272
Literatur .....	273
<b>12 Daten und Zufall mit digitalen Medien</b> .....	277
Andreas Eichler und Markus Vogel	
12.1 Einleitung .....	278
12.2 Aspekte eines gewinnbringenden Einsatzes digitaler Medien für das statistische Denken .....	278
12.3 Anforderungen an digitale Medien für den Unterricht zur Leitidee Daten und Zufall .....	281
12.3.1 Verarbeitung großer Datenmengen .....	281
12.3.2 Elementarisierung konventioneller Methoden .....	284
12.3.3 Untersuchung stochastischer Modelle .....	286
12.3.4 Begriffsbildung .....	290
12.4 Didaktische Forschung zu digitalen Medien für den Stochastikunterricht .....	295
12.5 Zusammenfassung und Ausblick .....	296
Literatur .....	298

---

<b>13</b>	<b>Informatisches Denken im Mathematikunterricht</b>	303
	Reinhard Oldenburg	
13.1	Informatisches Denken	303
13.2	Algorithmisches Denken	306
13.2.1	Was sind Algorithmen?	306
13.2.2	Bedeutung von Algorithmen für die Mathematik	309
13.2.3	Didaktik der Algorithmen im Mathematikunterricht	310
13.2.4	Algorithmen im Mathematikunterricht	312
13.3	Abstraktion in Mathematik und Informatik	316
13.4	Analyse und Reflexion	320
13.5	Fazit	321
	Literatur	322
<b>14</b>	<b>Mathematische Modelle und Digitalisierung – Forschungsstand, Chancen und Beispiele</b>	325
	Gilbert Greefrath und Hans-Stefan Siller	
14.1	Einleitung	326
14.2	Mathematisches Modellieren	327
14.2.1	Zugänge zum mathematischen Modellieren mit digitalen Medien	329
14.2.2	Chancen und offene Fragen	330
14.2.3	Modellierungskreisläufe mit digitalen Werkzeugen	332
14.2.4	Teilkompetenzen und Werkzeugnutzung	335
14.3	Untersuchungen zum mathematischen Modellieren mit digitalen Medien	336
14.4	Konzepte zum mathematischen Modellieren mit digitalen Medien	339
14.5	Fazit	342
	Literatur	342
<b>15</b>	<b>Argumentieren und Beweisen mit digitalen Werkzeugen</b>	347
	Christine Bescherer und Andrea Hoffkamp	
15.1	Einführung in die Thematik	348
15.1.1	Ein erstes illustrierendes Beispiel	350
15.2	Theoretischer Hintergrund	353
15.3	Effekte und Charakteristika bei der Nutzung digitaler Werkzeuge beim Argumentieren und Beweisen	356
15.3.1	Erweiterung des Methodenspektrums und dessen Auswirkungen	356
15.3.2	(Quasi-)Empirisches Arbeiten mit Hilfe von digitalen Werkzeugen	359

15.3.3	Prozesse der Hypothesen- bzw. Vermutungsgenerierung und die Verbindung zum Beweis als Produkt . . . . .	364
15.3.4	Automatische und interaktive Beweissoftware . . . . .	368
15.4	Zusammenfassung . . . . .	371
	Literatur. . . . .	371
<b>16</b>	<b>Darstellen und Kommunizieren – neu gedacht?!</b> . . . . .	375
	Christof Schreiber und Rebecca Klose	
16.1	EinBlick in die Standards. . . . .	376
16.2	EinBlick – Potenziale digitaler Medien zum Darstellen und Kommunizieren . . . . .	377
16.3	EinBlick in die Primarstufe . . . . .	379
16.4	EinBlick in die Forschung . . . . .	382
16.4.1	Digitale Medien als Zugangswege zu mathematischen Inhalten. . . . .	383
16.4.2	Erstellung digitaler Lernprodukte zur Untersuchung mathematischer Erklär- und Begriffsbildungsprozesse . . . . .	386
16.5	EinBlick in die Lehrerbildung . . . . .	387
16.6	Resümée und AusBlick . . . . .	391
	Literatur. . . . .	394
<b>17</b>	<b>Digital Technology in Mathematics Education: Past Performance and Future Pathways</b> . . . . .	399
	Paul Drijvers	
17.1	Introduction . . . . .	399
17.2	The Straddle between Past and Future. . . . .	401
17.2.1	Older and More Innovative Technological Tools . . . . .	402
17.2.2	Traditional and New Curricula and Content . . . . .	404
17.2.3	Traditional and New Didactical Approaches and Theories . . . . .	405
17.3	Towards a Future Agenda for Research and Implementation . . . . .	406
	References . . . . .	409