

Paulo Ribenboim

Meine Zahlen, meine Freunde

Glanzlichter der Zahlentheorie



Springer

Inhaltsverzeichnis

1 Die Fibonacci-Zahlen und das Nordpolarmeer	1
1 Grundlegende Definitionen	2
A Lucas-Folgen	2
B Spezielle Lucas-Folgen	3
C Verallgemeinerungen	3
2 Grundlegende Eigenschaften	5
A Binets Formeln	5
B Entartete Lucas-Folgen	5
C Wachstum und numerische Berechnungen	6
D Algebraische Beziehungen	7
E Teilbarkeitseigenschaften	9
3 Primteiler von Lucas-Folgen	10
A Die Mengen $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{P}(V)$ und der Rang des Erscheinens	10
B Primitive Faktoren von Lucas-Folgen	17
4 Primzahlen in Lucas-Folgen	27
5 Potenzen und quadratvolle Zahlen in Lucas-Folgen	29
A Hauptsätze für Potenzen	30
B Genaue Bestimmung bei speziellen Folgen	31
C Einheitliche Bestimmung von Vielfachen, Quadraten und Quadratklassen für bestimmte Familien von Lucas-Folgen	37
D Quadratvolle Zahlen in Lucas-Folgen	43
2 Darstellung reeller Zahlen mit Hilfe von Fibonacci-Zahlen	53

VIII Inhaltsverzeichnis

3 Primzahlrekorde	65
4 Primzahlverkauf	83
5 Eulers berühmtes primzahlerzeugendes Polynom	97
1 Quadratische Erweiterungen	100
2 Ganzheitsringe	101
3 Diskriminanten	101
4 Zerlegung von Primzahlen	102
A Eigenschaften der Norm	102
5 Einheiten	107
6 Die Klassenzahl	107
A Berechnung der Klassenzahl	110
B Bestimmung aller quadratischen Zahlkörper mit Klassenzahl 1	112
7 Der Hauptsatz	115
6 Gauß und das Klassenzahlproblem	119
1 Einführung	119
2 Höhepunkte im Leben von Gauß	119
3 Kurzer geschichtlicher Hintergrund	121
4 Binäre quadratische Formen	122
5 Die Hauptprobleme	125
6 Äquivalenz von Formen	126
7 Bedingte Lösung der Hauptprobleme	127
8 Echte Äquivalenzklassen definiter Formen	129
9 Echte Äquivalenzklassen indefiniter Formen	133
A Ein weiteres Zahlenbeispiel	138
10 Die Automorphe einer einfachen Form	138
11 Komposition von echten Äquivalenzklassen einfacher Formen	142
12 Die Geschlechtertheorie	144
13 Die Struktur der Gruppe von echten Äquivalenzklassen einfacher Formen	151
14 Berechnungen und Vermutungen	152
15 Die Zeit nach Gauß	154
16 Formen im Vergleich zu Idealen in quadratischen Zahlkörpern	154
17 Dirichlets Klassenzahlformel	161
18 Lösung des Klassenzahlproblems für definite Formen	165

19	Das Klassenzahlproblem für indefinite Formen	170
20	Weitere Fragen und Vermutungen	173
21	Viele unbehandelte Themen	177
7	Aufeinanderfolgende Potenzen	183
1	Einführung	183
2	Geschichte	185
3	Spezialfälle	187
4	Teilbarkeitseigenschaften	200
5	Abschätzungen	205
	A Die Gleichung $a^U - b^V = 1$	205
	B Die Gleichung $X^m - Y^n = 1$	207
	C Die Gleichung $X^U - Y^V = 1$	211
6	Der Beweis von Catalans Vermutung	213
7	Abschließende Kommentare und Anwendungen	214
8	1093	223
	A Bestimmung des Restes von $q_p(a)$	226
	B Identitäten und Kongruenzen für den Fermat-Quotienten	227
9	Machtlos gegenüber Mächtigkeit	241
1	Potente Zahlen	241
	A Verteilung potenter Zahlen	242
	B Additive Probleme	244
	C Differenzprobleme	245
2	Potenzen	247
	A Pythagoreische Dreiecke und Fermats Problem	247
	B Varianten von Fermats Problem	250
	C Die Vermutung von Euler	251
	D Die Gleichung $AX^l + BY^m = CZ^n$	252
	E Potenzen als Werte von Polynomen	257
3	Exponentielle Kongruenzen	258
	A Die Wieferich-Kongruenz	258
	B Primitive Primfaktoren	261
4	Traummathematik	264
	A Die Aussagen	264
	B Aussagen	265
	C Binomialzahlen und Wieferich-Kongruenzen	267
	D Erdös-Vermutung und Wieferich-Kongruenz	270

E Der Traum im Traum	270
10 Was für eine Art Zahl ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?	285
1 Einführung	285
2 Arten von Zahlen	285
3 Wie Zahlen gegeben sind	290
4 Ein kurzer historischer Abriss	299
5 Kettenbrüche	302
A Allgemeines	303
B Periodische Kettenbrüche	304
C Einfache Kettenbrüche von π und e	306
6 Approximation durch rationale Zahlen	310
A Die Ordnung der Approximation	310
B Die Markoff-Zahlen	312
C Maße für die Irrationalität	314
D Ordnung der Approximierung von irrationalen algebraischen Zahlen	314
7 Irrationalität spezieller Zahlen	316
8 Transzendente Zahlen	325
A Liouville-Zahlen	325
B Approximation durch rationale Zahlen: Schärfere Sätze	327
C Hermite, Lindemann und Weierstrass	332
D Ein Resultat von Siegel über Exponenten	334
E Hilberts siebtes Problem	336
F Die Arbeit von Baker	337
G Die Vermutung von Schanuel	339
H Transzendenzmaß und die Klassifikation von Mahler	344
9 Schlussbemerkungen	347
11 Galimatias Arithmeticae	361
Namensverzeichnis	377
Sachverzeichnis	385