

Jürgen Elstrodt

# Maß- und Integrationstheorie

Sechste, korrigierte Auflage

 Springer

# Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel I. <math>\sigma</math>-Algebren und Borelsche Mengen</i>	1
§ 1. Das Inhaltsproblem und das Maßproblem	1
§ 2. Bezeichnungen und mengentheoretische Grundlagen	6
1. Bezeichnungen	6
2. Limes superior und Limes inferior	8
Aufgaben	10
§ 3. Ringe, Algebren, $\sigma$ -Ringe und $\sigma$ -Algebren	11
1. Ringstruktur von $\mathfrak{P}(X)$	11
2. Ringe und Algebren	11
3. $\sigma$ -Ringe und $\sigma$ -Algebren	13
Aufgaben	15
§ 4. Erzeuger und Borelsche Mengen	16
1. Erzeuger	16
2. Borelsche Mengen	17
3. Verhalten unter Abbildungen	19
Aufgaben	20
§ 5. Halbringe	20
1. Halbringe	20
2. Der von einem Halbring erzeugte Ring	22
Aufgaben	22
§ 6. Monotone Klassen und Dynkin-Systeme	23
1. Monotone Klassen	23
2. Dynkin-Systeme	24
Aufgaben	26
<i>Kapitel II. Inhalte und Maße</i>	27
§ 1. Inhalte, Prämaße und Maße	27
1. Definitionen und erste Folgerungen	27
2. Ein erster Fortsetzungssatz	30
3. Eigenschaften von Inhalten	31
4. Charakterisierung der $\sigma$ -Additivität	32
5. Historische Anmerkungen	33
Aufgaben	34
§ 2. Inhalte und Prämaße auf $\mathbb{R}$	37
1. Endliche Inhalte auf $\mathbb{J}$	37
2. Endliche Prämaße auf $\mathbb{J}$	38
3. Kurzbiographie von É. BOREL	41
Aufgaben	42

§ 3. Inhalte und Prämaße auf $\mathbb{R}^p$	43
1. Das Lebesguesche Prämaß auf $\mathcal{I}^p$	43
2. Differenzenoperatoren	44
3. Inhalte auf $\mathcal{I}^p$	46
4. Prämaße auf $\mathcal{I}^p$	47
5. Kurzbiographie von J. RADON	48
Aufgaben	49
§ 4. Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen	50
1. Äußere Maße	50
2. Der Fortsetzungssatz	53
3. Die Lebesgue-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^p$	55
4. Kurzbiographie von C. CARATHÉODORY	57
Aufgaben	58
§ 5. Eindeutigkeit der Fortsetzung	59
1. $\sigma$ -endliche Inhalte	59
2. Der Eindeutigkeitssatz	60
3. Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$	61
Aufgaben	62
§ 6. Vollständige Maßräume	63
Aufgaben	65
§ 7. Das Lebesguesche Maß	66
1. Approximationssätze	66
2. Charakterisierung der Lebesgue-Mesbarkeit	67
3. Der Satz von H. STEINHAUS	68
4. Meßbarkeit konvexer Mengen	68
Aufgaben	69
§ 8. Das Cantorsche Diskontinuum	70
1. Konstruktion von $C$	70
2. Triadische Entwicklung	71
3. Mächtigkeiten von $\mathfrak{B}^p$ und $\mathfrak{L}^p$	73
4. Die Cantorsche Funktion	73
Aufgaben	74
§ 9. Metrische äußere Maße und Hausdorff-Maße	76
1. Metrische äußere Maße	76
2. Hausdorff-Maße	78
3. Rektifizierbare Kurven	78
4. Kurzbiographie von F. HAUSDORFF	80
Aufgaben	82

<i>Kapitel III. Meßbare Funktionen</i>	83
§ 1. Meßbare Abbildungen und Bildmaße	85
1. Meßbare Abbildungen	85
2. Bildmaße	87
Aufgaben	88
§ 2. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes	89
1. Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes	89
2. Das Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter bijektiven affinen Abbildungen	91
3. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes	92
4. Das $p$ -dimensionale äußere Hausdorff-Maß	94
Aufgaben	95
§ 3. Existenz nicht meßbarer Mengen	96
1. Nicht Lebesgue-meßbare Mengen und Unlösbarkeit des Maßproblems	96
2. Kurzbiographie von G. VITALI	99
3. Weitere Beispiele nicht Lebesgue-meßbarer Mengen	99
4. Existenz nicht meßbarer Mengen für Lebesgue-Stieltjessche Maße	100
Aufgaben	102
§ 4. Meßbare numerische Funktionen	103
1. Rechnen in $\bar{\mathbb{R}}$ , Topologie von $\bar{\mathbb{R}}$	104
2. Meßbare numerische Funktionen	105
3. Approximation durch Treppenfunktionen	108
4. Abzählbar erzeugte Meßräume	109
5. Ein minimaler Erzeuger von $\mathfrak{B}^1$	109
Aufgaben	110
§ 5. Produkt- $\sigma$ -Algebren	112
1. Initial- $\sigma$ -Algebren und Produkt- $\sigma$ -Algebren	112
2. Borel-Mengen topologischer Produkte	114
3. Meßbarkeit der Diagonalen	115
Aufgaben	116
<i>Kapitel IV. Das Lebesgue-Integral</i>	119
§ 1. Integration von Treppenfunktionen	120
Aufgaben	121
§ 2. Integration nicht-negativer meßbarer Funktionen	122
1. Definition des Integrals	122
2. Der Satz von der monotonen Konvergenz	125
3. Kurzbiographie von B. LEVI	126
4. Maße mit Dichten	127
Aufgaben	127

§ 3. Integrierbare Funktionen	128
1. Integrierbare Funktionen	128
2. Linearität und Monotonie des Integrals	131
3. Der Raum $\mathcal{L}^1$	132
4. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger	133
5. Integration über meßbare Teilmengen	135
6. Historische Anmerkungen	136
7. Kurzbiographie von W.H. YOUNG	137
Aufgaben	138
§ 4. Fast überall bestehende Eigenschaften	140
Aufgaben	142
§ 5. Konvergenzsätze	144
1. Das Lemma von FATOU	144
2. Kurzbiographie von P. FATOU	145
3. Der Satz von der majorisierten Konvergenz	145
4. Von einem Parameter abhängige Integrale	147
5. Der Satz von SCHEFFÉ	149
Aufgaben	150
§ 6. Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	151
1. Eigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	151
2. Uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	153
3. Mittelwertsätze der Integralrechnung	156
4. Kurzbiographie von H. LEBESGUE	157
Aufgaben	160
<i>Kapitel V. Produktmaße, Satz von FUBINI und Transformationsformel</i>	163
§ 1. Produktmaße	163
1. Produkt- $\sigma$ -Algebren	164
2. Produktmaße	164
3. Das Cavalierische Prinzip	169
4. Produkte endlich vieler Maßräume	170
5. Das $p$ -dimensionale äußere Hausdorff-Maß	171
Aufgaben	173
§ 2. Der Satz von FUBINI	175
1. Der Satz von FUBINI	175
2. Historische Anmerkungen	180
3. Beispiele für Anwendungen des Satzes von FUBINI	181
4. Der Gaußsche Integralsatz für die Ebene	184
5. Kurzbiographien von G. FUBINI und L. TONELLI	187
Aufgaben	188

§ 3. Faltung und Fourier-Transformation	191
1. Integration in bezug auf Bildmaße	191
2. Transformation von Maßen mit Dichten	192
3. Die Faltung auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \beta^p)$	193
4. Die Fourier-Transformation	195
Aufgaben	200
§ 4. Die Transformationsformel	201
1. Die Transformationsformel	202
2. Der Satz von SARD	209
3. Verallgemeinerte Transformationsformel	211
4. Transformation von Maßen mit Dichten bez. $\lambda^p$	211
5. Der Brouwersche Fixpunktsatz	213
Aufgaben	215
<i>Kapitel VI. Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrationstheorie</i>	219
§ 1. Die Ungleichungen von JENSEN, HÖLDER und MINKOWSKI	220
1. Die Jensensche Ungleichung	220
2. Die Höldersche Ungleichung	223
3. Die Minkowskische Ungleichung	224
4. Historische Anmerkungen	225
Aufgaben	226
§ 2. Die Räume $L^p$ und der Satz von RIESZ-FISCHER	229
1. Die Räume $\mathcal{L}^p$ und $L^p$	229
2. Der Satz von RIESZ-FISCHER	231
3. Die Banach-Algebra $L^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \beta^n)$	234
4. Der Hilbert-Raum $L^2(\mu)$	235
5. Der Banach-Verband $L^p_{\mathbb{R}}$	240
6. Dichte Unterräume von $L^p$	242
7. Der Satz von PLANCHEREL	243
8. Der Satz von FATOU über Potenzreihen	244
9. Historische Anmerkungen	245
10. Kurzbiographien von F. RIESZ und E. FISCHER	246
Aufgaben	247
§ 3. Der Satz von JEGOROW	250
1. Konvergenz $\mu$ -fast überall	250
2. Fast gleichmäßige Konvergenz	251
3. Kurzbiographie von D.F. JEGOROW	252
Aufgaben	253

§ 4. Konvergenz nach Maß	253
1. Konvergenz nach Maß und lokal nach Maß	254
2. Cauchy-Folgen für die Konvergenz nach Maß	255
3. Vergleich der Konvergenzbegriffe	256
4. Charakterisierung der Konvergenz n.M. und der Konvergenz lokal n.M.	257
Aufgaben	258
§ 5. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$	259
1. Der Satz von PRATT	260
2. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$	261
3. Der Konvergenzsatz von VITALI	262
4. Schwache Konvergenz in $\mathcal{L}^p$	263
Aufgaben	267
<i>Kapitel VII. Absolute Stetigkeit</i>	269
§ 1. Signierte Maße; Hahnscher und Jordanscher Zerlegungssatz	269
1. Signierte Maße	269
2. Der Hahnsche Zerlegungssatz	271
3. Positive Variation, negative Variation und Variation	272
4. Jordanscher Zerlegungssatz	273
5. Der Banach-Verband der endlichen signierten Maße	274
6. Kurzbiographie von H. HAHN	275
Aufgaben	277
§ 2. Der Satz von RADON–NIKODÝM und der Lebesguesche Zerlegungssatz	279
1. Absolute Stetigkeit	279
2. Der Satz von RADON–NIKODÝM	280
3. Kurzbiographie von O. NIKODÝM	284
4. Der Lebesguesche Zerlegungssatz	285
Aufgaben	287
§ 3. Der Dualraum von $L^p$ ( $1 \leq p < \infty$ )	288
1. Der Dualraum von $L^p(\mu)$ ( $1 \leq p < \infty$ )	288
2. Die multiplikativen Linearformen auf der Banach-Algebra $L^1(\mu_m)$	293
Aufgaben	295
§ 4. Absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$	296
1. Der Überdeckungssatz von VITALI	296
2. Differenzierbarkeit monotoner Funktionen $\lambda$ -f.ü.	298
3. Der Dichtesatz	301
4. Absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$	302
5. Lebesguesche Zerlegung Lebesgue–Stieltjesscher Maße	306
6. Rektifizierbare Kurven	308
Aufgaben	309

<i>Kapitel VIII. Maße auf topologischen Räumen</i>	312
§ 1. Borel-Maße, Radon-Maße, Regularität	313
1. Grundbegriffe	313
2. Regularitätssätze	317
3. Moderate Borel-Maße	318
4. Regularität von Borel-Maßen	318
5. Regularität von Borel-Maßen auf polnischen Räumen	320
6. Der Satz von LUSIN	323
7. Kurzbiographie von N.N. LUSIN	324
Aufgaben	327
§ 2. Der Darstellungssatz von F. RIESZ	328
1. Problemstellung	328
2. Fortsetzungssatz	329
3. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für lokal-kompakte Räume	335
4. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für vollständig reguläre Räume	339
5. Träger von Maßen	343
6. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für stetige Linearformen auf $C_0(X)$	345
Aufgaben	350
§ 3. Das Haarsche Maß	351
1. Topologische Gruppen	352
2. Linksinvariante Linearformen und Maße	354
3. Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes	356
4. Anwendungen des Haar-Maßes	366
5. Invariante und relativ invariante Maße auf Restklassenräumen	368
6. Kurzbiographie von A. HAAR	375
Aufgaben	376
§ 4. Schwache Konvergenz und schwache Kompaktheit	378
1. Eine Regularitätseigenschaft endlicher Maße auf metrischen Räumen	379
2. Schwache und vage Konvergenz von Folgen von Maßen	380
3. Das Portmanteau-Theorem	384
4. Schwache Konvergenz von Verteilungsfunktionen und die Sätze von HELLY-BRAY und HELLY	386
5. Der Satz von PROCHOROV	392
6. Die Laplace-Transformation	398
7. Die Prochorov-Metrik	401
Aufgaben	408

<i>Anhang A. Topologische Räume</i>	410
<i>Anhang B. Transfinite Induktion</i>	414
<i>Literaturverzeichnis</i>	416
<i>Namenverzeichnis</i>	423
<i>Symbolverzeichnis</i>	428
<i>Sachverzeichnis</i>	429