

Klaus D. Schmidt

Maß und Wahrscheinlichkeit



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
-------------------------	---

Teil I Mengensysteme und Abbildungen

1 Mengensysteme	7
1.1 Topologien	8
1.2 σ -Algebren	14
1.3 Dynkin-Systeme	16
1.4 \cap -stabile Mengensysteme.....	17
1.5 Halbringe und Ringe	20
2 Topologische Räume und messbare Räume	25
2.1 Urbilder von Mengensystemen	25
2.2 Topologische Räume und stetige Abbildungen	27
2.3 Messbare Räume und messbare Abbildungen	29
3 Produkträume	33
3.1 Produkte und Projektionen	33
3.2 Produkte von topologischen Räumen	36
3.3 Produkte von messbaren Räumen	39

Teil II Maßtheorie

4 Mengenfunktionen	43
4.1 Inhalte	43
4.2 Maße	49
4.3 Signierte Maße	56

5	Fortsetzung von Maßen	63
5.1	Eindeutigkeitssatz	63
5.2	Äußere Maße	65
5.3	Existenzsatz	67
5.4	Approximationssatz	70
5.5	Lebesgue-Maß	72
6	Transformation von Maßen	79
6.1	Bildmaße	79
6.2	Translationsinvariante Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	80
6.3	Lineare Abbildungen des Lebesgue-Maßes	85

Teil III Integrationstheorie

7	Messbare Funktionen	91
7.1	Messbare Funktionen auf einem Messraum	92
7.2	Messbare Funktionen auf einem Maßraum	101
8	Lebesgue-Integral	109
8.1	Positive einfache Funktionen	110
8.2	Positive messbare Funktionen	115
8.3	Integrierbare Funktionen	123
8.4	L^p -Räume	135
9	Berechnung des Lebesgue-Integrals	147
9.1	Integralinduzierte Maße und signierte Maße	148
9.2	Integration nach einem Maß mit Dichte	149
9.3	Absolutstetige und singuläre Maße	155
9.4	Integration nach einem Bildmaß	163
9.5	Integration nach einem eingeschränkten Maß	165
9.6	Produktmaße	168
9.7	Integration nach einem Produktmaß	175
9.8	Lebesgue-Integral und Riemann-Integral	180

Teil IV Wahrscheinlichkeitstheorie

10	Wahrscheinlichkeitsräume	193
10.1	Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsgrößen	194
10.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	196
10.3	Symmetrische Wahrscheinlichkeitsräume	198
10.4	Endliche Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen	202
10.5	Projektive Familien von Wahrscheinlichkeitsräumen	204
10.6	Satz von Andersen/Jessen	209

11	Unabhängigkeit	219
11.1	Unabhängige Familien von Ereignissen	219
11.2	Unabhängige Familien von Ereignissystemen	229
11.3	Unabhängige Familien von Zufallsgrößen	236
11.4	Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen	241
12	Univariate Verteilungen	245
12.1	Verteilungen und Verteilungsfunktionen	245
12.2	Transformationen von Verteilungen	267
12.3	Momente	274
12.4	Zentrale Momente	285
13	Multivariate Verteilungen	293
13.1	Verteilungen und Verteilungsfunktionen	293
13.2	Transformationen von Verteilungen	301
13.3	Randverteilungen	302
13.4	Unabhängigkeit	309
13.5	Verteilungen von Summen von Zufallsvariablen	314
13.6	Momente	319
13.7	Zentrale Momente	323
14	Konvergenz von Folgen von Zufallsvariablen	331
14.1	Fast sichere Konvergenz	331
14.2	Stochastische Konvergenz	333
14.3	Konvergenz im p -ten Mittel	335
15	Gesetze der Großen Zahlen	337
15.1	Schwache Gesetze der Großen Zahlen	337
15.2	Starke Gesetze der Großen Zahlen	341
15.3	Satz von Glivenko/Cantelli	353
15.4	Irrfahrten	357

Teil V Vertiefung der Wahrscheinlichkeitstheorie

16	Erzeugende Funktionen	369
16.1	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion	370
16.2	Momenterzeugende Funktion	378
16.3	Kumulantenerzeugende Funktion	381
16.4	Charakteristische Funktion	383
17	Schwache Konvergenz und Zentraler Grenzwertsatz	391
17.1	Schwache Konvergenz	392
17.2	Straffheit	400
17.3	Zentraler Grenzwertsatz	405

18 Bedingte Erwartung	409
18.1 Bedingte Erwartung einer positiven Zufallsvariablen	410
18.2 Bedingte Erwartung und bedingte Integrierbarkeit	416
18.3 Bedingte Erwartung als Projektion	426
18.4 Martingale	428
19 Bedingte Wahrscheinlichkeit und bedingte Verteilung	435
19.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit	435
19.2 Bedingte Unabhängigkeit	438
19.3 Bedingte Verteilung	442
19.4 Bedingte Dichte	446
19.5 Bedingte Gesetze der Großen Zahlen	451
20 Regularität und Satz von Kolmogorov	455
20.1 Regularität	456
20.2 Satz von Kolmogorov	458

Anhang

A Fakultät und Gamma–Funktion	465
A.1 Fakultät und Binomial–Koeffizient	465
A.2 Gamma–Funktion und Beta–Funktion	466
B Vektorräume, Ordnung und Topologie	467
B.1 Vektorräume	467
B.2 Ordnung	468
B.3 Topologie	469
B.4 Ordnung und Topologie	470
C Der Euklidische Raum	471
C.1 Vektoren und Matrizen	471
C.2 Ordnung	473
C.3 Topologie	474
C.4 Ordnung und Topologie	474
Literaturverzeichnis	475
Symbolverzeichnis	477
Sachverzeichnis	481