

Matthias Beck · Sinai Robins

Das Kontinuum diskret berechnen

Aus dem Englischen von Kord Eickmeyer

Inhaltsverzeichnis

Teil I Die Grundlagen der Berechnung diskreter Volumina

1	Das Münzenproblem von Frobenius	3
1.1	Warum Erzeugendenfunktionen?	3
1.2	Zwei Münzen	5
1.3	Partialbrüche und eine überraschende Formel	7
1.4	Der Satz von Sylvester	12
1.5	Drei und mehr Münzen	13
	Anmerkungen	16
	Aufgaben	18
	Offene Probleme	25
2	Eine Gallerie diskreter Volumina	27
2.1	Die Sprache der Polytope	27
2.2	Der Einheitswürfel	28
2.3	Der Standardsimplex	31
2.4	Die Bernoulli-Polynome als Gitterpunktzhäler von Pyramiden	34
2.5	Die Gitterpunktzhäler von Kreuzpolytopen	38
2.6	Der Satz von Pick	40
2.7	Polygone mit rationalen Eckpunkten	43
2.8	Die Euler'sche Erzeugendenfunktion für allgemeine rationale Polytope	48
	Anmerkungen	51
	Aufgaben	53
	Offene Probleme	58
3	Gitterpunkte in Polytopen zählen: Ehrhart-Theorie	59
3.1	Triangulierungen und spitze Kegel	59
3.2	Gitterpunkttransformationen für rationale Kegel	62
3.3	Erweitern und Zählen mit Ehrharts ursprünglichem Ansatz	66
3.4	Die Ehrhart-Reihe eines ganzzahligen Polytops	69

XVIII Inhaltsverzeichnis

3.5	Vom diskreten zum stetigen Volumen eines Polytops	74
3.6	Interpolation	76
3.7	Rationale Polytope und Ehrhart-Quasipolynome	78
3.8	Reflektionen über das Münzenproblem und die Gallerie aus Kapitel 2	79
	Anmerkungen	79
	Aufgaben	80
	Offene Probleme	85
4	Reziprozität	87
4.1	Erzeugendenfunktionen für ein wenig irrationale Kegel	88
4.2	Stanleys Reziprozitätsgesetz für rationale Kegel	90
4.3	Ehrhart-Macdonald-Reziprozität für rationale Polytope	91
4.4	Die Ehrhart-Reihe eines reflexiven Polytops	92
4.5	Weitere „Reflexionen“ über die Kapitel 1 und 2	94
	Anmerkungen	94
	Aufgaben	95
	Offene Probleme	97
5	Seitenzahlen und die Dehn-Sommerville-Gleichungen	99
5.1	Die Dehn-Sommerville-Gleichungen	99
5.2	Dehn-Sommerville Erweitert	101
5.3	Anwendungen auf die Koeffizienten eines Ehrhart-Polynoms .	102
5.4	Relatives Volumen	104
	Anmerkungen	105
	Aufgaben	107
6	Magische Quadrate	109
6.1	It's a Kind of Magic	110
6.2	Semimagische Quadrate: Punkte im Birkhoff-von Neumann- Polytop	112
6.3	Magische Erzeugendenfunktionen und Konstanttermgleichungen	115
6.4	Die Aufzählung magischer Quadrate	120
	Anmerkungen	122
	Aufgaben	124
	Offene Probleme	125

Teil II Jenseits der Grundlagen

7 Endliche Fourier-Analysis	129
7.1 Ein motivierendes Beispiel	129
7.2 Endliche Fourier-Reihen periodischer Funktionen auf \mathbb{Z}	131
7.3 Die endliche Fourier-Transformation und ihre Eigenschaften	135
7.4 Die Parseval-Gleichung	137
7.5 Die Faltung endlicher Fourier-Reihen	139
Anmerkungen	141
Aufgaben	142
8 Dedekind-Summen	145
8.1 Fourier-Dedekind-Summen und wieder das Münzenproblem	145
8.2 Die Dedekind-Summe, ihre Reziprozität und Berechnungskomplexität	149
8.3 Rademacher-Reziprozität für Fourier-Dedekind-Summen	150
8.4 Der Mordell-Pommersheim-Tetraeder	154
Anmerkungen	156
Aufgaben	158
Offene Probleme	160
9 Die Zerlegung eines Polytops in seine Kegel	161
9.1 Die Gleichung „ $\sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m = 0$ “ ... oder „Viel Lärm um nichts“	161
9.2 Tangentialkegel und ihre rationalen Erzeugendenfunktionen	165
9.3 Der Satz von Brion	166
9.4 Brion impliziert Ehrhart	169
Anmerkungen	170
Aufgaben	171
10 Euler-Maclaurin-Summation im \mathbb{R}^d	173
10.1 Todd-Operatoren und Bernoulli-Zahlen	174
10.2 Eine stetige Version des Satzes von Brion	176
10.3 Polytope haben ihre Momente	179
10.4 Vom stetigen zum diskreten Volumen eines Polytops	180
Anmerkungen	183
Aufgabe	184
Offene Probleme	185
11 Raumwinkel	187
11.1 Ein neues diskretes Volumen unter Benutzung von Raumwinkeln	187
11.2 Raumwinkel-Erzeugendenfunktionen und ein Brion-artiger Satz	190

11.3 Raumwinkel-Reziprozität und die Brianchon-Gram-Gleichungen	192
11.4 Die Erzeugendenfunktion von Macdonalds	
Raumwinkelpolynome	196
Anmerkungen	197
Aufgaben	198
Offene Probleme	199
12 Eine diskrete Version des Satzes von Green mit elliptischen Funktionen	201
12.1 Der Residuensatz	201
12.2 Die Weierstraß'schen \wp - und ζ -Funktionen	203
12.3 Eine Wegintegral-Version des Satzes von Pick	205
Anmerkungen	206
Aufgaben	207
Offene Probleme	208
\mathcal{V}- und \mathcal{H}-Beschreibungen von Polytopen	209
A.1 Jeder \mathcal{H} -Kegel ist ein \mathcal{V} -Kegel	211
A.2 Jeder \mathcal{V} -Kegel ist ein \mathcal{H} -Kegel	213
Triangulierungen von Polytopen	215
Lösungshinweise zu den ♣-Aufgaben	219
Literatur	227
Symbolverzeichnis	237
Index	239