

Peter Bundschuh

# Einführung in die Zahlentheorie

Sechste, überarbeitete und aktualisierte Auflage

 Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Teilbarkeit</b> .....	1
§ 1. <b>Fundamentalsatz der Arithmetik</b> .....	2
1. Natürliche und ganze Zahlen 2. Teiler 3. Primzahlen 4. Satz von EUKLID 5. Der Fundamentalsatz der Arithmetik 6. Kanonische Primfaktorzerlegung 7. Teileranzahl- und Teilersummenfunktion 8. Vollkommene Zahlen 9. Irrationalität 10. Anmerkung zum Eindeutigkeitsbeweis	
§ 2. <b>Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> .....	15
1. Größter gemeinsamer Teiler (ggT) 2. Divisionsalgorithmus 3. Zwei Charakterisierungen des ggT 4. Idealtheoretische Deutung des ggT 5. Rechenregeln 6. Teilerfremdheit 7. Charakterisierung der Primzahlen 8. Nochmals: Eindeutigkeit im Fundamentalsatz 9. Euklidischer Algorithmus und ggT 10. Regelmäßiger Kettenbruch rationaler Zahlen 11. Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) 12. Zusammenhang zwischen ggT und kgV	
§ 3. <b>Lineare diophantische Gleichungen</b> .....	27
1. Warum "diophantisch"? 2. Lösbarkeitsbedingung 3. Der Fall zweier Unbestimmten 4. Spezielle Lösung, numerisches Beispiel 5. Reduktion des allgemeinen Falls 6. Struktur der Lösungsgesamtheit	
§ 4. <b>Zahlentheoretische Funktionen</b> .....	35
1. Einige Definitionen 2. Multiplikative und additive Funktionen 3. Produktdarstellung unendlicher Reihen 4. RIEMANNsche Zetafunktion 5. Zweimal EUKLIDS Satz 6. Faltung 7. Inverse bezüglich Faltung 8. Die Gruppe der multiplikativen Funktionen 9. MÖBIUSSche Müfunktion 10. Weitere spezielle multiplikative Funktionen 11. EULERS Phifunktion und Verallgemeinerungen 12. Eine Aussage "im Mittel" 13. Wahrscheinlichkeit für Teilerfremdheit 14. Historische Anmerkungen	

§ 5.	<b>Teilbarkeit in Integritätsringen</b> .....	53
	1. Teiler, Einheiten, Assoziiertheit 2. Die Begriffe ggT und kgV 3. Unzerlegbare Elemente, Primelemente 4. Faktorielle Ringe 5. Hauptidealringe 6. Euklidische Ringe 7. Polynome 8. Polynomringe über Körpern 9. Polynomringe über faktoriellen Ringen	
§ 6.	<b>Algebraische Zahlkörper, insbesondere quadratische</b> .....	65
	1. Algebraische Zahlen, Minimalpolynom 2. Konjugierte 3. Algebraische Zahlkörper 4. Normen 5. Ganzheit 6. Quadratische Zahlkörper 7. Deren Ganzheitsring 8. Einheiten quadratischer Zahlringe 9. Euklidische quadratische Zahlringe 10. Primzahlen als Summe zweier Quadrate 11. DEDEKINDS Beispiel	
	<b>Kapitel 2. Kongruenzen</b> .....	78
§ 1.	<b>Lineare Kongruenzen</b> .....	79
	1. Definition der Kongruenz, elementare Eigenschaften 2. FERMAT-Zahlen 3. Kürzungsregel 4. Vollständige Restsysteme 5. Lineare Kongruenzen 6. Bruchschreibweise 7. Restklassenring 8. Prime Restklassengruppe 9. Historische Bemerkungen	
§ 2.	<b>Simultane lineare Kongruenzen</b> .....	88
	1. Reduktion des Problems 2. Paarweise teilerfremde Moduln 3. Anwendungen, numerische Beispiele 4. Restklassenring als direkte Summe 5. Prime Restklassengruppe als direktes Produkt 6. Historische Bemerkungen	
§ 3.	<b>Die Sätze von Fermat, Euler und Wilson</b> .....	94
	1. DIRICHLETS Schubfachprinzip 2. Kongruenzverhalten von Potenzen 3. Der "kleine" FERMATSche Satz 4. Der EULERSche Satz 5. Numerische Anwendungen 6. Zusammengesetzt oder Primzahl? 7. FERMAT-EULER und geheime Nachrichtenübermittlung 8. Satz von WILSON 9. Anwendung auf eine quadratische Kongruenz	
§ 4.	<b>Polynomiale Kongruenzen</b> .....	104
	1. Problemstellung 2. Reduktion auf Primzahlpotenzmoduln 3. Überlegungen zur weiteren Reduktion 4. Reduktion auf Primzahlmoduln 5. Polynomkongruenzen bei Primzahlmoduln 6. Ein Beispiel	

§ 5.	<b>Primitivwurzeln</b> .....	109
	1. Definition 2. Primitivwurzeln modulo Primzahlen 3. Tabellen für Primitivwurzeln 4. Zu welchen Moduln sind Primitivwurzeln möglich? 5. Bestimmung aller Moduln mit Primitivwurzeln 6. Zweierpotenzen als Moduln 7. Basisdarstellung	

### **Kapitel 3. Potenzreste, insbesondere quadratische Reste** ..... 121

§ 1.	<b>Indexrechnung und Potenzreste</b> .....	121
	1. Indizes 2. Ein Beispiel 3. $n$ -te Potenzreste, quadratische Reste und Nichtreste 4. Kriterium für $n$ -te Potenzreste 5. Folgerungen aus dem Kriterium 6. $n$ -te Potenzreste, Modulzerlegung in Primzahlpotenzen	
§ 2.	<b>Quadratische Reste</b> .....	127
	1. Quadratische Kongruenzen und quadratische Reste 2. Kriterium für quadratische Reste 3. Das LEGENDRE-Symbol 4. EULERS Kriterium 5. GAUSSSches Lemma 6. Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Ergänzungssätze 7. Beweis des Reziprozitätsgesetzes 8. Ein numerisches Beispiel 9. Quadratische Nichtreste modulo Primzahlen 10. Primzahlen in arithmetischen Progressionen 11. Primfaktoren von FERMAT-Zahlen 12. MERSENNE-Primzahlen 13. Historisches zum Reziprozitätsgesetz	
§ 3.	<b>Verteilung quadratischer Reste</b> .....	147
	1. Summen über gewisse LEGENDRE-Symbole 2. Paare sukzessiver quadratischer Reste 3. Tripel sukzessiver quadratischer Reste 4. Eigenschaften JACOBSTHALScher Summen	

### **Kapitel 4. Additive Probleme und diophantische Gleichungen** .. 153

§ 1.	<b>Potenzsummen, insbesondere Quadratsummen</b> .....	154
	1. Primzahlen als Summe zweier Quadrate 2. THUES Lemma 3. Natürliche Zahlen als Summe zweier Quadrate 4. Natürliche Zahlen als Summe von vier Quadraten: LAGRANGES Satz 5. Nochmals Primzahlen als Summe zweier Quadrate 6. Summen dreier Quadrate 7. WARINGS Problem und HILBERTS Satz 8. Anmerkungen über Darstellungsanzahlen	

§ 2.	<b>Polynomiale diophantische Gleichungen</b> .....	167
	1. Pythagoräische Tripel 2. EUKLIDS Satz über pythagoräische Tripel 3. Rationale Punkte auf Kurven zweiten Grades 4. Rationale Punkte gewisser Kurven dritten Grades 5. Resultate von POINCARÉ, MORDELL und FALTINGS 6. Pythagoräische Dreiecke quadratischer Kathetenlängen 7. FERMATS Vermutung 8. Weitere Entwicklung des FERMAT-Problems (bis 1993) 9. Lösung des FERMAT-Problems	
§ 3.	<b>Die Pellsche Gleichung und Verwandtes</b> .....	185
	1. Problemstellung 2. Der DIRICHLETSche Approximationssatz 3. Un- endlich viele Lösungen der PELL-Gleichung 4. Lösungsstruktur der PELL-Gleichung 5. Pythagoräische Dreiecke mit Kathetendifferenz Eins 6. Einheiten reell-quadratischer Zahlkörper 7. Ganze Punkte auf Kur- ven zweiten Grades 8. Anmerkungen dazu	
<b>Kapitel 5. Verschiedene Entwicklungen reeller Zahlen</b> .....		200
§ 1.	<b>Die <math>g</math>-adische Entwicklung</b> .....	201
	1. Entwicklung natürlicher Zahlen 2. Teilbarkeitsregeln 3. Der gebro- chene Teil reeller Zahlen 4. Entwicklung reeller Zahlen 5. Entwicklung rationaler Zahlen 6. Periodizitätseigenschaften der Ziffernfolge 7. Dezi- malbruchentwicklungen 8. Rationale Zahlen mit gleichen Nennern 9. Ei- ne Anwendung des Irrationalitätskriteriums 10. Existenz transzendenter Zahlen 11. Dezimalbruchentwicklung und Dichtung 12. Historische An- merkungen	
§ 2.	<b>Die Cantorsche Entwicklung. Weitere Irrationalitätskriterien</b> .....	216
	1. Beschreibung der Entwicklung 2. CANTORSche Reihen und Irratio- nalität 3. Verwandte Irrationalitätskriterien 4. Anwendungen	
§ 3.	<b>Die regelmäßige Kettenbruchentwicklung</b> .....	222
	1. Der Kettenbruchalgorithmus 2. Konvergenz unendlicher Kettenbrü- che 3. Eindeutigkeit. Irrationalität 4. Periodische Kettenbrüche 5. Der Satz von LAGRANGE 6. Zur Minimallösung der PELLschen Gleichung 7. Annäherung reeller Zahlen durch rationale 8. Beste Näherungen 9. Anmerkungen dazu 10. Approximation algebraischer Zahlen zwei- ten Grades durch rationale 11. Eine arithmetische Eigenschaft von $e^{2/k}$ 12. Kettenbruchentwicklung von $e$	

<b>Kapitel 6. Transzendenz</b> .....	242
§ 1. <b>Entdeckung der Transzendenz</b> .....	242
1. Historisches 2. Der LIOUVILLESche Approximationssatz 3. Konstruktion transzendenter Kettenbrüche 4. Transzendente $g$ -adische Reihen	
§ 2. <b>Schärfere Approximationssätze</b> .....	248
1. Der THUE-SIEGEL-ROTHsche Satz 2. Anwendungen auf Transzendenz 3. THUE-Gleichung und ROTHs Verallgemeinerung 4. Reduktion auf den THUE-SIEGEL-ROTHschen Satz 5. Effektivitätsfragen 6. SCHMIDTs Sätze über simultane Approximation	
§ 3. <b>Die Sätze von Hermite, Lindemann und Weierstraß</b> .....	257
1. Historisches 2. Hauptergebnisse von HERMITE und LINDEMANN 3. Der Satz von LINDEMANN-WEIERSTRASS 4. Zur Äquivalenz der vier Versionen	
§ 4. <b>Die Methode von Hermite-Mahler</b> .....	263
1. Vorbemerkungen 2. Ungleichungen für algebraische Zahlen 3. Konstruktion geeigneter Exponentialpolynome 4. Eigenschaften dieser Exponentialpolynome 5. Eine Determinantenbetrachtung 6. Gewinnung einer nichtverschwindenden algebraischen Zahl 7. Untere Abschätzung 8. Obere Abschätzung 9. Parameterwahl 10. Historische Anmerkung	
§ 5. <b>Der Satz von Gel'fond-Schneider</b> .....	271
1. HILBERTs siebtes Problem 2. Ein Schubfachscluß 3. SIEGELSches Lemma 4. Hilfsfunktion für GEL'FOND-SCHNEIDER 5. Gewinnung einer zur Abschätzung geeigneten Zahl 6. Untere Abschätzung 7. Obere Abschätzung 8. Parameterwahl 9. Ausblicke	
<b>Kapitel 7. Primzahlen</b> .....	282
§ 1. <b>Elementare Ergebnisse</b> .....	282
1. Darstellung von Primzahlen durch Polynome 2. Exponentielle Folgen von Primzahlen 3. Große Lücken 4. Sieb des ERATOSTHENES, Primzahltafeln 5. Anzahlfunktion 6. Primzahlzwillinge 7. Die GOLDBACH-Probleme	

§ 2.	<b>Anzahlfunktion: Tchebychevs Sätze</b> .....	293
	1. Vermutungen von LEGENDRE und GAUSS 2. LEGENDRES Identität	
	3. Obere Abschätzung 4. Partielle Summation 5. Zwei asymptotische	
	Ergebnisse von MERTENS 6. Letzte Vorstufe des Primzahlsatzes	
§ 3.	<b>Der Primzahlsatz</b> .....	301
	1. RIEMANNs Anstoß 2. Konvergenz einer Folge und Primzahlsatz	
	3. Die Reste der Zetareihe 4. Fortsetzung und Nullstellenfreiheit der	
	RIEMANNschen Zetafunktion 5. Über gewisse DIRICHLET-Reihen 6. Die	
	Existenz des Grenzwerts 7. Anwendung des CAUCHY-Kriteriums	
	8. Konvergenzsatz 9. Mittelwert der MÖBIUS-Funktion 10. Funktio-	
	nalgleichung der Zetafunktion 11. Pole und Nullstellen der Zetafunktion	
	12. RIEMANNsche Vermutung 13. Schlußbemerkungen	
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	324
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	328