

Peter Bundschuh

Einführung in die Zahlentheorie

Sechste, überarbeitete und aktualisierte Auflage



Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Teilbarkeit	1
§ 1. Fundamentalsatz der Arithmetik	2
1. Natürliche und ganze Zahlen 2. Teiler 3. Primzahlen 4. Satz von EUKLID 5. Der Fundamentalsatz der Arithmetik 6. Kanonische Primfaktorzerlegung 7. Teileranzahl- und Teilersummenfunktion 8. Vollkommene Zahlen 9. Irrationalität 10. Anmerkung zum Eindeutigkeitsbeweis	
§ 2. Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches	15
1. Größter gemeinsamer Teiler (ggT) 2. Divisionsalgorithmus 3. Zwei Charakterisierungen des ggT 4. Idealtheoretische Deutung des ggT 5. Rechenregeln 6. Teilerfremdheit 7. Charakterisierung der Primzahlen 8. Nochmals: Eindeutigkeit im Fundamentalsatz 9. Euklidischer Algorithmus und ggT 10. Regelmäßiger Kettenbruch rationaler Zahlen 11. Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) 12. Zusammenhang zwischen ggT und kgV	
§ 3. Lineare diophantische Gleichungen	27
1. Warum "diophantisch"? 2. Lösbarkeitsbedingung 3. Der Fall zweier Unbestimmten 4. Spezielle Lösung, numerisches Beispiel 5. Reduktion des allgemeinen Falls 6. Struktur der Lösungsgesamtheit	
§ 4. Zahlentheoretische Funktionen	35
1. Einige Definitionen 2. Multiplikative und additive Funktionen 3. Produktdarstellung unendlicher Reihen 4. RIEMANNSche Zetafunktion 5. Zweimal EUKLIDS Satz 6. Faltung 7. Inverse bezüglich Faltung 8. Die Gruppe der multiplikativen Funktionen 9. MÖBIUSSche Müfunktion 10. Weitere spezielle multiplikative Funktionen 11. EULERS Phifunktion und Verallgemeinerungen 12. Eine Aussage "im Mittel" 13. Wahrscheinlichkeit für Teilerfremdheit 14. Historische Anmerkungen	

§ 5.	Teilbarkeit in Integritätsringen	53
1.	Teiler, Einheiten, Assoziiertheit	
2.	Die Begriffe ggT und kgV	
3.	Unzerlegbare Elemente, Primelemente	
4.	Faktorielle Ringe	
5.	Hauptidealringe	
6.	Euklidische Ringe	
7.	Polynome	
8.	Polynomringe über Körpern	
9.	Polynomringe über faktoriellen Ringen	
§ 6.	Algebraische Zahlkörper, insbesondere quadratische	65
1.	Algebraische Zahlen, Minimalpolynom	
2.	Konjugierte	
3.	Algebraische Zahlkörper	
4.	Normen	
5.	Ganzheit	
6.	Quadratische Zahlkörper	
7.	Deren Ganzheitsring	
8.	Einheiten quadratischer Zahrringe	
9.	Euklidische quadratische Zahrringe	
10.	Primzahlen als Summe zweier Quadrate	
11.	DEDEKINDS Beispiele	
Kapitel 2. Kongruenzen		78
§ 1.	Lineare Kongruenzen	79
1.	Definition der Kongruenz, elementare Eigenschaften	
2.	FERMAT-Zahlen	
3.	Kürzungsregel	
4.	Vollständige Restsysteme	
5.	Lineare Kongruenzen	
6.	Bruchschreibweise	
7.	Restklassenring	
8.	Prime Restklassengruppe	
9.	Historische Bemerkungen	
§ 2.	Simultane lineare Kongruenzen	88
1.	Reduktion des Problems	
2.	Paarweise teilerfremde Moduln	
3.	Anwendungen, numerische Beispiele	
4.	Restklassenring als direkte Summe	
5.	Prime Restklassengruppe als direktes Produkt	
6.	Historische Bemerkungen	
§ 3.	Die Sätze von Fermat, Euler und Wilson	94
1.	DIRICHLETS Schubfachprinzip	
2.	Kongruenzverhalten von Potenzen	
3.	Der "kleine" FERMATSche Satz	
4.	Der EULERSche Satz	
5.	Numerische Anwendungen	
6.	Zusammengesetzt oder Primzahl?	
7.	FERMAT-EULER und geheime Nachrichtenübermittlung	
8.	Satz von WILSON	
9.	Anwendung auf eine quadratische Kongruenz	
§ 4.	Polynomiale Kongruenzen	104
1.	Problemstellung	
2.	Reduktion auf Primzahlpotenzmoduln	
3.	Überlegungen zur weiteren Reduktion	
4.	Reduktion auf Primzahlmoduln	
5.	Polynomkongruenzen bei Primzahlmoduln	
6.	Ein Beispiel	

§ 5. Primivwurzeln	109
1. Definition 2. Primivwurzeln modulo Primzahlen 3. Tabellen für Primivwurzeln 4. Zu welchen Moduln sind Primivwurzeln möglich? 5. Bestimmung aller Moduln mit Primivwurzeln 6. Zweierpotenzen als Moduln 7. Basisdarstellung	
Kapitel 3. Potenzreste, insbesondere quadratische Reste	121
§ 1. Indexrechnung und Potenzreste	121
1. Indizes 2. Ein Beispiel 3. n -te Potenzreste, quadratische Reste und Nichtreste 4. Kriterium für n -te Potenzreste 5. Folgerungen aus dem Kriterium 6. n -te Potenzreste, Modulzerlegung in Primzahlpotenzen	
§ 2. Quadratische Reste	127
1. Quadratische Kongruenzen und quadratische Reste 2. Kriterium für quadratische Reste 3. Das LEGENDRE-Symbol 4. EULERS Kriterium 5. GAUSSSches Lemma 6. Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Ergänzungssätze 7. Beweis des Reziprozitätsgesetzes 8. Ein numerisches Beispiel 9. Quadratische Nichtreste modulo Primzahlen 10. Primzahlen in arithmetischen Progressionen 11. Primfaktoren von FERMAT-Zahlen 12. MERSENNE-Primzahlen 13. Historisches zum Reziprozitätsgesetz	
§ 3. Verteilung quadratischer Reste	147
1. Summen über gewisse LEGENDRE-Symbole 2. Paare sukzessiver quadratischer Reste 3. Tripel sukzessiver quadratischer Reste 4. Eigenschaften JACOBSTHALScher Summen	
Kapitel 4. Additive Probleme und diophantische Gleichungen . . 153	
§ 1. Potenzsummen, insbesondere Quadratsummen	154
1. Primzahlen als Summe zweier Quadrate 2. THUES Lemma 3. Natürliche Zahlen als Summe zweier Quadrate 4. Natürliche Zahlen als Summe von vier Quadraten: LAGRANGES Satz 5. Nochmals Primzahlen als Summe zweier Quadrate 6. Summen dreier Quadrate 7. WARINGS Problem und HILBERTS Satz 8. Anmerkungen über Darstellungsanzahlen	

§ 2. Polynomiale diophantische Gleichungen	167
1. Pythagoräische Tripel	2.
2. EUKLIDS Satz über pythagoräische Tripel	
3. Rationale Punkte auf Kurven zweiten Grades	4.
4. Rationale Punkte gewisser Kurven dritten Grades	5.
5. Resultate von POINCARE, MORDELL und FALTINGS	6.
6. Pythagoräische Dreiecke quadratischer Kathetenlängen	7.
7. FERMATS Vermutung	8.
8. Weitere Entwicklung des FERMAT-Problems (bis 1993)	9.
9. Lösung des FERMAT-Problems	
§ 3. Die Pellsche Gleichung und Verwandtes	185
1. Problemstellung	2.
2. Der DIRICHLETSche Approximationssatz	3.
3. Unendlich viele Lösungen der PELL-Gleichung	4.
4. Lösungsstruktur der PELL-Gleichung	5.
5. Pythagoräische Dreiecke mit Kathetendifferenz Eins	6.
6. Einheiten reell-quadratischer Zahlkörper	7.
7. Ganze Punkte auf Kurven zweiten Grades	8.
8. Anmerkungen dazu	
Kapitel 5. Verschiedene Entwicklungen reeller Zahlen	200
§ 1. Die g-adische Entwicklung	201
1. Entwicklung natürlicher Zahlen	2.
2. Teilbarkeitsregeln	3.
3. Der gebrochene Teil reeller Zahlen	4.
4. Entwicklung reeller Zahlen	5.
5. Entwicklung rationaler Zahlen	6.
6. Periodizitätseigenschaften der Ziffernfolge	7.
7. Dezimalbruchentwicklungen	8.
8. Rationale Zahlen mit gleichen Nennern	9.
9. Eine Anwendung des Irrationalitätskriteriums	10.
10. Existenz transzenter Zahlen	11.
11. Dezimalbruchentwicklung und Dichtung	12.
12. Historische Anmerkungen	
§ 2. Die Cantorsche Entwicklung. Weitere Irrationalitätskriterien	216
1. Beschreibung der Entwicklung	2.
2. CANTORSche Reihen und Irrationalität	3.
3. Verwandte Irrationalitätskriterien	4.
4. Anwendungen	
§ 3. Die regelmäßige Kettenbruchentwicklung	222
1. Der Kettenbruchalgorithmus	2.
2. Konvergenz unendlicher Kettenbrüche	3.
3. Eindeutigkeit. Irrationalität	4.
4. Periodische Kettenbrüche	5.
5. Der Satz von LAGRANGE	6.
6. Zur Minimallösung der PELLSchen Gleichung	7.
7. Annäherung reeller Zahlen durch rationale	8.
8. Beste Näherungen	9.
9. Anmerkungen dazu	10.
10. Approximation algebraischer Zahlen zweiten Grades durch rationale	11.
11. Eine arithmetische Eigenschaft von $e^{2/k}$	
12. Kettenbruchentwicklung von e	

Kapitel 6. Transzendenz	242
§ 1. Entdeckung der Transzendenz.....	242
1. Historisches 2. Der LIOUVILLEsche Approximationssatz 3. Konstruktion transzenter Kettenbrüche 4. Transzidente g -adische Reihen	
§ 2. Schärfere Approximationssätze.....	248
1. Der THUE–SIEGEL–ROTHsche Satz 2. Anwendungen auf Transzendenz 3. THUE–Gleichung und ROTHs Verallgemeinerung 4. Reduktion auf den THUE–SIEGEL–ROTHschen Satz 5. Effektivitätsfragen 6. SCHMIDTs Sätze über simultane Approximation	
§ 3. Die Sätze von Hermite, Lindemann und Weierstraß	257
1. Historisches 2. Hauptergebnisse von HERMITE und LINDEMANN 3. Der Satz von LINDEMANN–WEIERSTRASS 4. Zur Äquivalenz der vier Versionen	
§ 4. Die Methode von Hermite–Mahler	263
1. Vorbemerkungen 2. Ungleichungen für algebraische Zahlen 3. Konstruktion geeigneter Exponentialpolynome 4. Eigenschaften dieser Exponentialpolynome 5. Eine Determinantenbetrachtung 6. Gewinnung einer nichtverschwindenden algebraischen Zahl 7. Untere Abschätzung 8. Obere Abschätzung 9. Parameterwahl 10. Historische Anmerkung	
§ 5. Der Satz von Gel'fond–Schneider	271
1. HILBERTs siebtes Problem 2. Ein Schubfachschluß 3. SIEGELSches Lemma 4. Hilfsfunktion für GEL'FOND–SCHNEIDER 5. Gewinnung einer zur Abschätzung geeigneten Zahl 6. Untere Abschätzung 7. Obere Abschätzung 8. Parameterwahl 9. Ausblicke	
Kapitel 7. Primzahlen	282
§ 1. Elementare Ergebnisse	282
1. Darstellung von Primzahlen durch Polynome 2. Exponentielle Folgen von Primzahlen 3. Große Lücken 4. Sieb des ERATOSTHENES, Primzahltafeln 5. Anzahlfunktion 6. Primzahlzwillinge 7. Die GOLDBACH–Probleme	

§ 2. Anzahlfunktion: Tchebychevs Sätze	293
1. Vermutungen von LEGENDRE und GAUSS	2.
3. Obere Abschätzung	4.
5. Zwei asymptotische Ergebnisse von MERTENS	6.
6. Letzte Vorstufe des Primzahlsatzes	
§ 3. Der Primzahlsatz	301
1. RIEMANNS Anstoß	2.
3. Die Reste der Zetareihe	4.
5. Über gewisse DIRICHLET-Reihen	6.
7. Existenz des Grenzwerts	8.
9. Konvergenzsatz	10.
11. Mittelwert der MÖBIUS-Funktion	12.
12. Pole und Nullstellen der Zetafunktion	13.
13. Schlußbemerkungen	
Literaturverzeichnis	324
Namen– und Sachverzeichnis	328