

1 Verstehen – Operationsverständnis	1
1.1 Lernen als aktive Konstruktion von Sinn	1
1.2 Verstehen als ein Lernziel im Kontext von Lernprozessen im Mathematikunterricht	2
1.2.1 Konzeptuelles und prozedurales Wissen	2
1.2.2 Verständniserwerb als Prozess	6
1.2.3 Grundvorstellungskonzept, Mathematisieren und Modellieren	9
1.3 Operationsverständnis	12
1.4 Modelle zum Operationsverständnis	18
1.5 Zusammenfassung und Schlussfolgerung	28
2 Die Division als Rechenoperation	33
2.1 Mathematische Begriffsklärung	33
2.2 Didaktische Begriffsklärung	36
2.3 Die Beziehung zwischen Division und Multiplikation auf formaler Ebene	38
2.4 Sachsituationen zur Division	39
2.4.1 Sachsituationen zum Aufteilen	41
2.4.2 Sachsituationen zum Verteilen	43
2.5 Handlung und Darstellung mit (didaktischem) Material	44
2.5.1 Aufteil-Handlungen	45
2.5.2 Verteil-Handlungen	46
2.5.3 Aufteilen: bildliche Darstellungen	47
2.5.4 Verteilen: bildliche Darstellung	49
2.5.5 Felddarstellungen zum Aufteilen und Verteilen	49

XXI

2.6	Strategien zum Lösen von Divisionsaufgaben	52
2.7	Sprechweise und Notationsform	53
2.8	Teilen und Sprache	56
2.9	Zusammenfassende stoffdidaktische Überlegungen zur Division und Schlussfolgerungen	58
3	Empirische Untersuchungen zum Thema Division	63
3.1	Lösungsstrategien der Kinder vor der Thematisierung der Division	64
3.1.1	Studien zur Lösungshäufigkeit	64
3.1.2	Studien zur Lösungshäufigkeit nach Aspekt	65
3.1.3	Klassifikation der Strategien	69
3.1.4	Unterschiede innerhalb der Strategien – Vorgehensweisen beim Aufteilen	73
3.1.5	Unterschiede in den Strategien – Vorgehensweisen beim Verteilen	75
3.1.6	Besonderheiten im Verhältnis von Aufteilen und Verteilen	78
3.1.7	Überblick Studien zur Division vor der Thematisierung	80
3.2	Studien zur Division nach der Thematisierung im Unterricht ...	83
3.2.1	Übersetzungsprozesse von der symbolischen Ebene ausgehend	84
3.2.2	Übersetzungsprozesse zur symbolischen Darstellung hinführend	86
3.2.3	Divisionsaspekte – Bevorzugung	90
3.2.4	Studien zu Strategien und Vorgehensweisen beim Lösen von Divisionsaufgaben	92
3.2.5	Rolle des Unterrichts	96
3.2.6	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse und Aussagen zum Divisionsverständnis	97
3.3	Studien zur Division in der Sekundarstufe	99
3.3.1	Textaufgaben zur Division	99
3.3.2	Symbolische Darstellungen mit Material darstellen	102
3.3.3	Zu einer symbolischen Darstellung eine Sachaufgabe formulieren	103
3.3.4	Aufgaben auf formaler Ebene lösen	103

4 Fachdidaktische Empfehlungen	107
4.1 Empfehlungen zum Umgang mit dem Verhältnis von Multiplikation und Division	110
4.1.1 Innermathematische Ebene – formale Beziehung	110
4.1.2 Inhaltliche Ebene – Voraussetzungen	111
4.1.3 Zeitpunkt der erstmaligen Thematisierung der Division	114
4.2 Empfehlungen zu den beiden Aspekten der Division	114
4.2.1 Zeitliches Verhältnis von Aufteilen und Verteilen	114
4.2.2 Reihenfolge der Thematisierung der beiden Aspekte	116
4.2.3 Unterscheidung in Schreib- und Sprechweisen von Aufteil- und Verteil-Aufgaben	119
4.2.4 Soll eine bewusste begriffliche Unterscheidung angestrebt werden?	121
4.2.5 Zusammenfassung und Diskussion der fachdidaktischen Empfehlungen	128
5 Von der Forschungsfrage zum Forschungsdesign	133
5.1 Forschungsinteresse und Forschungsfrage	133
5.2 Methodologischer Rahmen	139
5.3 Aufbau der Untersuchung	143
5.3.1 Klinisches Interview	143
5.3.2 Grundlagen zur inhaltlichen Konzeption der Interviews	145
5.3.3 Überblick über die Durchführung der Studie	149
5.3.4 Vorerhebungen – Vorgehensweise und Aufgabenstellungen	153
5.3.4.1 Erste Vorerhebung	153
5.3.4.2 Zweite Vorerhebung	154
5.3.5 Hauptuntersuchungen	159
5.4 Dokumentation der Daten – Vorgehensweise in Datenanalyse	168
6 Analyse der Entwicklungen von Divisionsverständnissen – Vorerhebung	189
6.1 Lösungshäufigkeiten der Sachaufgaben	190
6.2 Lösungsdauer und das Nutzen von Hilfsmitteln	193
6.3 Vorgehensweisen und Strategien bei den Aufteil-Aufgaben	196

6.4	Vorgehensweisen und Strategien bei den Verteil-Aufgaben	202
6.5	Sachaufgaben zum Aufteilen und Verteilen im Vergleich	209
6.5.1	(Weiter-)Entwicklungen der Strategien zwischen den beiden Vorerhebungen	209
6.5.2	Auffälligkeiten beim Lösen der Sachaufgaben zum Aufteilen	214
6.5.3	Auffälligkeiten beim Lösen der Sachaufgaben zum Verteilen	221
6.5.4	Weiterentwicklungen beim Lösen der Sachaufgaben zum Verteilen	235
6.6	Ergebnisse der Aufgaben zum Darstellungswechsel beim zweiten Vorerhebungstermin	237
6.6.1	$S \rightarrow M$: Eine Sachaufgabe mit Material darstellen	237
6.6.2	$S \rightarrow T$: Zu einer Sachsituation einen passenden Term notieren	238
6.6.3	$T \rightarrow M$: Einen vorgelegten Divisionsterm mit Material darstellen	246
6.6.4	$T \rightarrow S$: Zu einem vorgelegten Term eine Sachsituation (Rechengeschichte) finden	249
6.7	Zwischenfazit	252
7	Ergebnisse zum Divisionsverständnis	259
7.1	$S \rightarrow T$: Zu einer Sachsituation einen passenden Term finden	260
7.1.1	Modellierungen der Sachsituation	261
7.1.2	Handlungsvorstellungen zu Divisionssachaufgaben	261
7.1.3	Auffälligkeiten und Schwierigkeiten beim Notieren von Divisionstermen zu Aufteil-Aufgaben	264
7.1.4	Schwierigkeiten beim Notieren von Divisionstermen zu Verteil-Aufgaben	269
7.1.5	Einzelergebnisse zum Darstellungswechsel $S \rightarrow T$	279
7.1.6	Typenbildung – Modellierung einer Sachsituation (Entwicklung)	282
7.2	$T \rightarrow S$: Zu einem Term eine passende Sachsituation finden	283
7.2.1	Allgemeine Ergebnisse zum Darstellungswechsel Term $\rightarrow$ Sachsituation	284
7.2.2	Ergebnisse zu den erfolgreich erzählten Rechengeschichten	285

7.2.3	Ergebnisse zu den Auffälligkeiten beim Darstellungswechsel Term $\rightarrow$ Sachsituation	287
7.2.4	Ergebnisse zu den von den Kindern gewählten Zugängen	309
7.2.5	Typenbildungen zum Darstellungswechsel Term $\rightarrow$ Sachsituation	312
7.2.6	Ergebnisse zur Frage, ob die andere Deutungsmöglichkeit auch passe	314
7.2.7	Typenbildung – Anerkennung der nicht selbst formulierten Divisionssachaufgabe	325
7.3	T $\rightarrow$ M: Einen Term mit Material darstellen	326
7.3.1	Allgemeine Ergebnisse zum Darstellungswechsel Term – Material	327
7.3.2	Ergebnisse zu den Auffälligkeiten beim Darstellungswechsel Term – Material	328
7.3.3	Ergebnisse zu den von den Kindern gewählten Zugängen T $\rightarrow$ M	336
7.3.4	Typenbildung – zum Darstellungswechsel Term $\rightarrow$ Material	339
7.3.5	Ergebnisse zur Frage, ob die andere Deutungsmöglichkeit auch passe	340
7.3.6	Typenbildung – Anerkennung der nicht selbst ausgeführten Materialdarstellung	350
7.4	B $\rightarrow$ T: Zu einem Bild einen passenden Term finden	351
7.4.1	Allgemeine Ergebnisse zum Darstellungswechsel Bild – Term	352
7.4.2	Ergebnisse zu den Auffälligkeiten beim Darstellungswechsel Bild – Term	353
7.4.3	Ergebnisse zu den von den Kindern gewählten Zugängen B $\rightarrow$ T	366
7.4.4	Typenbildung – zum Darstellungswechsel Bild – Term	368
7.4.5	Ergebnisse zur Anerkennung der anderen Deutungsmöglichkeit B $\leftrightarrow$ T	369
7.4.6	Typenbildung – Anerkennung des nicht selbst notierten Divisionsterms	378

7.5	Innermathematische Beziehungen	379
7.5.1	Ergebnisse zum Verständnis der Multiplikation vor der Einführung der Division	379
7.5.1.1	Allgemeine Ergebnisse – Darstellungswechsel/Multiplikation	380
7.5.1.2	Typenbildung – Darstellungswechsel bei der Multiplikation – Vorerhebung	382
7.5.2	Ergebnisse zum Einmaleins	383
7.5.3	Typenbildung Einmaleins	390
7.5.4	Ergebnisse zum Einsdurcheins	391
7.5.5	Typenbildung Einsdurcheins – Entwicklung	396
7.5.6	Vorgehensweisen beim Lösen von Rechnungen zur Division	398
7.5.7	Typenbildung Einsdurcheins – Strategien	401
7.5.8	Zusammenfassung der Ergebnisse zu den innermathematischen Beziehungen	402
7.6	Begriff „teilen“	404
7.6.1	Beschreibungen „teilen“ – Vorerhebungen	404
7.6.2	Typenbildung – „teilen“ – Vorerhebungen	405
7.6.3	Beschreibungen „teilen“ – nach der Einführung der Division	406
7.6.4	Typenbildung – „teilen“ – Gesamtergebnis	407
7.7	Unterrichtsgeschehen	408
7.7.1	Arbeit an der Multiplikation	409
7.7.2	Arbeit an der Division – Aufteilen	411
7.7.3	Arbeit an der Division – Verteilen	413
7.7.4	Angaben der Lehrerinnen zum Umgang mit dem Verhältnis beider Aspekte zueinander	420
7.7.5	Arbeit zu Multiplikation und Division in der dritten Klasse	422
8	Fazit	429
8.1	Zusammenfassung der Ergebnisse zum Divisionsverständnis	430
8.1.1	Zusammenfassung der Ergebnisse zum Darstellungswechsel Sachsituation – Term	430
8.1.2	Zusammenfassung der Ergebnisse zum Darstellungswechsel Term – Sachsituation	432
8.1.3	Zusammenfassung der Ergebnisse zum Darstellungswechsel Term – Materialdarstellung	434

8.1.4	Zusammenfassung der Ergebnisse zum Darstellungswechsel Bild – Term	435
8.1.5	Zusammenfassung der Ergebnisse zu den innermathematischen Beziehungen	437
8.1.6	Zusammenfassung der Ergebnisse zur Beschreibungen des Begriffs „teilen“	439
8.2	Einordnung der vorliegenden Ergebnisse	439
8.3	Limitationen der Studie aufgrund von Schwächen in der Anlage und Durchführung	441
8.4	Resümee und Ausblick	443
8.4.1	Allgemeine Überlegungen	443
8.4.2	Überlegungen zu ausgewählten Ergebnissen	444
8.4.3	Überlegungen zum Umgang mit den beiden Divisionsaspekten	448
8.4.4	Weiterführende Fragestellungen	454
Anhang I Transkriptionsregeln		461
Literaturverzeichnis		463