

Inhaltsverzeichnis

1	Partielle Ableitungen	1
1.1	Funktionen mit zwei Veränderlichen	1
1.1.1	Überblick	1
1.1.2	Gebiete in $\mathbb{R}^2$	3
1.1.3	Höhenlinien	6
1.1.4	Stetigkeit	7
1.2	Partielle Ableitungen erster Ordnung	9
1.2.1	Die Tangentialebene	9
1.2.2	Der Gradientenvektor	12
1.2.3	Totale Differenzierbarkeit	18
1.2.4	Lokale Extremstellen	23
1.2.5	Die mehrdimensionale Kettenregel	25
1.2.6	Richtungsableitungen	29
1.2.7	Extrema unter Nebenbedingungen	31
1.2.8	Das mehrdimensionale Newton-Verfahren	35
1.3	Partielle Ableitungen zweiter Ordnung	46
1.3.1	Die Hesse-Matrix	47
1.3.2	Ableitungen höherer Ordnung	55
1.3.3	Der Satz von Schwarz	57
1.4	Ausblick: mehrere Veränderliche	59
1.5	Flächen in Parameterdarstellung	61
1.6	Ableitung komplexer Funktionen	69
1.6.1	Komplexe Funktionen	69
1.6.2	Holomorphe Funktionen	72
1.6.3	Konforme Abbildungen	77
	Aufgaben zu Kapitel 1	80
2	Mehrdimensionale Integrale I	85
2.1	Parameterintegrale	85
2.2	Kurvenintegrale	89
2.2.1	Skalare Kurvenintegrale	89
2.2.2	Vektorielle Kurvenintegrale	95
2.2.3	Das Potential eines Vektorfelds	106
2.2.4	Kurvenintegrale und Feldlinien	111
2.2.5	Kurvenintegrale im Raum	113
2.3	Flächenintegrale	115
2.3.1	Rechteckige Bereiche	115
2.3.2	Normalbereiche	119
2.3.3	Krummlinige Koordinaten	125
2.3.4	Anwendungen des Flächenintegrals	133
	Aufgaben zu Kapitel 2	137

3	Differentialgleichungen I	145
3.1	Grundbegriffe und erste Beispiele	145
3.1.1	Was ist eine Differentialgleichung (DGL)?	145
3.1.2	Beispiele aus Physik und Technik	146
3.1.3	Anfangs- und Randbedingungen	148
3.2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	151
3.2.1	Lösung durch Variablentrennung	151
3.2.2	Lösung mittels Substitution	157
3.2.3	Anwendung: Feldlinien	159
3.2.4	Exakte Differentialgleichungen	162
3.2.5	Die lineare DGL 1. Ordnung	167
3.2.6	Numerische Lösungsverfahren	173
3.2.7	Qualitatives Lösungsverhalten	181
3.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	185
3.3.1	Die allgemeine homogene lineare DGL 2. Ordnung	185
3.3.2	Die homogene DGL mit konstanten Koeffizienten	191
3.3.3	Die inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten	195
3.3.4	Die Eulersche Differentialgleichung	201
3.3.5	Die inhomogene lineare DGL 2. Ordnung	204
3.4	Lineare DGlen dritter und höherer Ordnung	206
3.4.1	Die allgemeine Lösung der homogenen DGL	206
3.4.2	Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL	209
3.5	Lineare DGlen und die Laplace-Transformation	212
3.6	Ausführliche Anwendungsbeispiele	221
3.6.1	Die Differentialgleichung der Kettenlinie	221
3.6.2	Das gedämpfte Federpendel	225
3.6.3	Erzwungene Schwingungen	229
3.6.4	Anwendung in der Thermodynamik	232
3.7	Eigenwertprobleme bei linearen DGlen	235
3.8	Variationsprobleme	241
3.8.1	Funktionale und Extremale	241
3.8.2	Die Euler-Lagrange-Gleichung	243
3.8.3	Erhaltungsgrößen (Invarianten)	248
3.8.4	Allgemeinere Variationsprobleme	254
3.9	Variationsmethoden bei linearen DGlen	256
3.9.1	Das Verfahren von Ritz	256
3.9.2	Randeigenwertprobleme	265
	Aufgaben zu Kapitel 3	269
4	Reihenentwicklungen	275
4.1	Unendliche Reihen	275
4.1.1	Grundbegriffe und Beispiele	275
4.1.2	Konvergenz und Divergenz	277
4.1.3	Konvergenzkriterien	281
4.2	Potenzreihen	285
4.2.1	Grundbegriffe und Beispiele	285
4.2.2	Der Konvergenzbereich	286

4.2.3	Rechnen mit Potenzreihen	290
4.3	Maclaurin-Reihen	293
4.3.1	Die Maclaurin-Reihe einer Funktion	293
4.3.2	Alternative Berechnung von Reihen	298
4.3.3	Die Taylor-Reihe einer Funktion	301
4.3.4	Ausblick: Analytische Funktionen	303
4.4	Potenzreihen-Anwendungen	305
4.4.1	Die Berechnung von Funktionswerten	305
4.4.2	Approximation durch Taylor-Polynome	305
4.4.3	Integration durch Reihenentwicklung	308
4.4.4	Die Berechnung von Grenzwerten	311
4.4.5	Eine Begründung der Euler-Formel	313
4.4.6	Der Umfang einer Ellipse	314
4.4.7	Anwendungsbeispiel: Die Klothoide	316
4.4.8	Anhang: Eine kleine Reihentafel	319
4.5	Fourier-Reihen und Fourier-Transformation	320
4.5.1	Fourier-Reihen periodischer Funktionen	320
4.5.2	Die spektrale Form einer Fourier-Reihe	330
4.5.3	Komplexe Fourier-Reihen	334
4.5.4	Die Fourier-Transformation	337
	Aufgaben zu Kapitel 4	344
5	Mehrdimensionale Integrale II	351
5.1	Integralsätze in der Ebene	351
5.1.1	Einführung und Grundbegriffe	351
5.1.2	Der Integralsatz von Green	352
5.1.3	Anwendungen des Greenschen Satzes	361
5.1.4	Das Flussintegral	367
5.1.5	Der Integralsatz von Gauß	370
5.1.6	Der Laplace-Operator	374
5.2	Volumen- und Oberflächenintegrale	378
5.2.1	Volumenintegrale	378
5.2.2	Oberflächenintegrale	383
5.2.3	Integralsätze im Raum	388
5.3	Integrale komplexer Funktionen	396
5.3.1	Komplexe Kurvenintegrale	396
5.3.2	Der Integralsatz von Cauchy	399
5.3.3	Komplexe Stammfunktionen	402
5.3.4	Die Cauchy-Integralformel	404
	Aufgaben zu Kapitel 5	407
6	Differentialgleichungen II	413
6.1	Lineare Differentialgleichungssysteme	413
6.1.1	Einführung und Beispiele	413
6.1.2	Eigenwerte und Eigenlösungen	419
6.1.3	Komplexe Eigenwerte	423
6.1.4	Anfangsbedingungen	427

6.1.5	Mehrfache Eigenwerte	428
6.1.6	Qualitatives Lösungsverhalten	433
6.1.7	Die Fundamentalmatrix	436
6.1.8	Inhomogene Systeme	439
6.2	Spezielle Differentialgleichungen	442
6.2.1	Der Potenzreihenansatz	444
6.2.2	Die Kummersche Differentialgleichung	446
6.2.3	Die Besselsche Differentialgleichung	450
6.2.4	Die Hermitesche Differentialgleichung	453
6.2.5	Die Tschebyschow-Differentialgleichung	456
6.2.6	Spezielle Funktionen – ein Überblick	460
6.3	Partielle Differentialgleichungen	462
6.3.1	Einführung und Grundbegriffe	463
6.3.2	Die eindimensionale Wellengleichung	465
6.3.3	Analytische Lösungen der Wellengleichung	468
6.3.4	Die Finite-Differenzen-Methode	476
6.3.5	Die zweidimensionale Wellengleichung	482
6.3.6	Die Schrödinger-Gleichung	485
	Aufgaben zu Kapitel 6	496
7	Stochastik	503
7.1	Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeiten	503
7.1.1	Der Begriff Wahrscheinlichkeit	503
7.1.2	Mehrstufige Zufallsversuche	506
7.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	510
7.2	Zufallsgrößen und Verteilungen	515
7.2.1	Zufallsgrößen	515
7.2.2	Diskrete Verteilungen	516
7.2.3	Stetige Verteilungen	520
7.2.4	Varianz und Standardabweichung	525
7.2.5	Stichproben und empirische Varianz	530
7.3	Poisson-Prozesse und Warteschlangen	532
7.3.1	Der Poisson-Prozess	532
7.3.2	Modell eines Ankunftsstroms	536
7.3.3	Modell einer Bedienstation	537
7.4	Normalverteilung und Ausgleichsrechnung	544
7.4.1	Der Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	544
7.4.2	Die Methode der kleinsten Quadrate	550
7.4.3	Der Korrelationskoeffizient	559
	Aufgaben zu Kapitel 7	565
	Lösungsvorschläge	569
	Literaturverzeichnis	677
	Stichwortverzeichnis	681