

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einteilung von Rechenwegen</b>	<b>1</b>
1.1 Verwendung der Begriffe Rechenform, Rechenweg, Lösungsweg und Rechenstrategie	2
1.2 Ziffernrechnen und Zahlenrechnen	5
1.3 Kopfrechnen	7
1.4 Halbschriftliches Rechnen	9
1.4.1 Schriftliches Rechnen	11
1.4.2 Halbschriftliches Rechnen in der englischsprachigen Literatur	13
1.4.3 Definition des Begriffs Zahlenrechnen für die vorliegende Arbeit	16
1.4.4 Bedeutung des Zahlenrechnens aus Sicht der Fachdidaktik	17
<b>2 Flexible und aufgabenadäquate Rechenwege</b>	<b>23</b>
2.1 Flexibel und/oder adäquat?	23
2.2 Faktoren für eine adäquate Wahl eines Rechenweges	24
2.3 Erkennen adäquater Rechenwege im Lösungsprozess: Strategiewahlmodell oder Emergenzmodell?	26
2.4 Flexibles Rechnen nach Rathgeb-Schnierer	29
2.5 Verwendung der Begriffe <i>flexibel</i> , <i>adäquat</i> und <i>aufgabenadäquat</i> in der vorliegenden Untersuchung	31
<b>3 Multiplikation mehrstelliger Zahlen – fachlicher und empirischer Rahmen</b>	<b>37</b>
3.1 Begründung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen	38

3.2	Einteilungen von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen .....	43
3.2.1	Kategorisierung von Rechenwegen für die Multiplikation in Schrittweise, Stellenweise und Ableiten .....	43
3.2.2	Anmerkungen zur Einteilung in Schrittweise, Stellenweise und Ableiten .....	47
3.2.3	<i>Invented Strategies</i> der Multiplikation nach Van de Walle et al. (2019) .....	49
3.3	Forschungsergebnisse zu Entwicklung und Verwendung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen .....	51
3.3.1	Ambrose et al. (2003) – Entwicklung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen .....	52
3.3.2	Baek (1998, 2006) – Entwicklung von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen .....	58
3.3.3	Mendes (2012) und Mendes et al. (2012) – Ein teaching experiment zur Erarbeitung multiplikativer Rechenwege .....	62
3.3.4	Hirsch (2001, 2002) – Verwendung halbschriftlicher Strategien im vierten Schuljahr .....	68
3.3.5	Heirdsfield, Cooper, Mulligan und Irons (1999) – Verwendung von Rechenwegen über die Schulstufen vier, fünf und sechs .....	71
3.3.6	Hofemann und Rautenberg (2010) – Vorgehensweisen und Fehlermuster bei der halbschriftlichen Multiplikation .....	72
3.3.7	Gloor und Peter (1999) – Informelle Strategien vor der Thematisierung .....	74
3.3.8	Schulz (2015, 2018) – Kompetenzaspekte flexiblen Multiplizierens .....	75
3.4	Vergleich der Einteilungen von Rechenwegen für mehrstellige Multiplikationen .....	77
3.5	Zusammenfassung des Forschungsstandes .....	80
<b>4</b>	<b>Multiplikation mehrstelliger Zahlen – unterrichtliche Umsetzung .....</b>	<b>85</b>
4.1	Rechenwege für mehrstellige Multiplikationen im österreichischen Lehrplan der Volksschule (dritte Schulstufe) .....	85

4.2	Rechenwege für mehrstellige Multiplikationen unterrichten . . . . .	87
4.2.1	Informelle Rechenwege aufgreifen . . . . .	88
4.2.2	Rechenkonferenzen einrichten . . . . .	90
4.2.3	Punktefelder als Arbeitsmittel nutzen . . . . .	91
4.2.4	Notationsformen entwickeln und nutzen . . . . .	99
4.2.5	Besondere Aufgabenmerkmale erkennen und Rechenvorteile nutzen . . . . .	101
4.3	Hürden bei der Umsetzung des Zahlenrechnens . . . . .	103
4.3.1	Gefahr der Überforderung von leistungsschwächeren Kindern . . . . .	104
4.3.2	Gefahr des Abgleitens ins mechanische Rechnen . . . . .	106
4.3.3	Gefahr der Bedeutungslosigkeit des Zahlenrechnens nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren . . . . .	106
4.3.4	Gefahr der Überforderung von Lehrkräften . . . . .	107
4.4	Rechenwege für mehrstellige Multiplikationen in gängigen österreichischen Schulbüchern . . . . .	108
4.4.1	Analyse der Schulbücher . . . . .	109
4.4.2	Zusammenfassung und Diskussion der Analyse . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Forschungsfragen, Methodologie und Design der empirischen Untersuchung . . . . .</b>	<b>121</b>
5.1	Forschungslücke . . . . .	121
5.2	Inhaltliche Zielsetzungen und Forschungsfragen . . . . .	124
5.3	Methodologische Grundlegung – Fachdidaktische Entwicklungsforschung . . . . .	126
5.4	Beschreibung der Stichprobe . . . . .	135
5.5	Methoden der Datenerhebung und Datenauswertung . . . . .	141
5.5.1	Klinische Interviews . . . . .	141
5.5.2	Konzeption und Durchführung der klinischen Interviews . . . . .	144
5.5.3	Konzeption und Durchführung der schriftlichen Befragung . . . . .	150
5.5.4	Auswertung der klinischen Interviews und der schriftlichen Befragung . . . . .	152
5.5.5	Der Prozess der Typenbildung nach Kelle und Kluge (2010) . . . . .	154
5.5.6	Konstruktion des Kategoriensystems . . . . .	159
5.5.7	Konzeption des Leitfadens für das Interview mit den Lehrkräften . . . . .	165
5.5.8	Auswertung der Interviews mit den Lehrkräften . . . . .	167

5.6	Überlegungen zur Entwicklung des Lernarrangements .....	167
5.6.1	Leitideen bei der Gestaltung des Lernarrangements .....	169
5.7	Beschreibung des Lernarrangements .....	172
5.7.1	Operative Zusammenhänge entdecken – Malaufgaben mit gleichen Ergebnissen .....	174
5.7.2	Das 400er-Punktfeld einführen – Malaufgaben darstellen und aus Darstellungen erkennen .....	175
5.7.3	Aufgreifen informeller Rechenwege für einstellig mal zweistellige Multiplikationen in Rechenkonferenzen .....	177
5.7.4	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Zerlegen und Plus .....	178
5.7.5	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Zerlegen und Minus .....	180
5.7.6	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Verdoppeln .....	185
5.7.7	Spezielle Rechenwege gezielt erarbeiten – Verdoppeln und Halbieren .....	188
5.7.8	Geschicktes Rechnen durch Erkennen und Nutzen besonderer Aufgabenmerkmale .....	192
5.8	Ergebnisse und Erfahrungen aus der ersten Erprobung im Hinblick auf die Überarbeitung des Lernarrangements .....	196
5.9	Zur Dokumentation der zweiten Erprobung .....	199
5.9.1	Beschreibung der Seminarreihe .....	200
5.9.2	Zeitliche Rahmung und Ablauf der Umsetzung im zweiten Zyklus .....	201
<b>6</b>	<b>Empirische Ergebnisse</b> .....	<b>205</b>
6.1	Rechenwege und Typisierung <i>vor</i> der Umsetzung des Lernarrangements .....	206
6.1.1	Analyse der Rechenwege <i>vor</i> der Umsetzung .....	206
6.1.2	Lösungsrichtigkeit <i>vor</i> der Umsetzung .....	219
6.1.3	Operative Beziehungen nutzen <i>vor</i> der Umsetzung .....	222
6.1.4	Typisierung nach Rechenwegen <i>vor</i> der Umsetzung ....	226
6.2	Rechenwege und Begründen von Rechenwegen <i>nach</i> der Umsetzung des Lernarrangements .....	236
6.2.1	Analyse der Rechenwege <i>nach</i> der Umsetzung .....	236
6.2.2	Lösungsrichtigkeit <i>nach</i> der Umsetzung .....	249
6.2.3	Operative Beziehungen nutzen <i>nach</i> der Umsetzung ....	250

6.2.4	Begründen von Rechenwegen am 400er-Punktefeld <i>nach</i> der Umsetzung .....	256
6.2.5	Mehrere Rechenwege für eine Aufgabe .....	261
6.2.6	Welcher Rechenweg ist der einfachste? .....	264
6.2.7	Begründungen für den einfachsten Rechenweg .....	265
6.2.8	Ein Vergleich der Ergebnisse <i>vor</i> und <i>nach</i> der Umsetzung .....	274
6.3	Typisierung nach Rechenwegen <i>nach</i> der Umsetzung des Lernarrangements .....	276
6.3.1	Festlegung der relevanten Vergleichsdimensionen .....	276
6.3.2	Gruppierung der Fälle und Analyse der inhaltlichen Zusammenhänge .....	280
6.3.3	Von Gruppierungen zu Typen .....	286
6.3.4	Charakterisierung der Typen .....	290
6.3.5	Einzelfalldarstellung 1: Kind nutzt überwiegend fehlerhafte Rechenwege .....	307
6.3.6	Einzelfalldarstellung 2: Kind nutzt Rechenwege, die im Hinblick auf die auftretenden Aufgabenmerkmale nicht als aufgabenadäquat bezeichnet werden können ...	310
6.4	Hürden in der Umsetzung und Hinweise für eine Überarbeitung .....	313
6.4.1	Fehlerhafte Rechenwege .....	313
6.4.2	Übergeneralisierung .....	323
6.4.3	Gefahr der Überforderung leistungsschwächerer Kinder .....	325
6.4.4	Hürden durch Einflüsse aus dem Elternhaus oder dem sozialen Umfeld .....	326
6.4.5	Hinweise für eine weitere Überarbeitung des Lernarrangements .....	328
7	<b>Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse</b> .....	335
7.1	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse <i>vor</i> der Umsetzung des Lernarrangements .....	335
7.1.1	Rechenwege für Mult_1 $\times$ 2_ZR <i>vor</i> der Thematisierung .....	336
7.1.2	Typisierung nach genutzten Rechenwegen <i>vor</i> der Thematisierung .....	338
7.1.3	Die Besonderheit der Stichprobe .....	339

---

7.1.4	Transfer von Ableitungswegen aus der Einmaleinserarbeitung auf $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$ .....	339
7.1.5	Fazit der Ergebnisse <i>vor</i> der Thematisierung .....	342
7.2	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse nach der Umsetzung des Lernarrangements .....	343
7.2.1	Rechenwege für $\text{Mult}_1 \times 2_{\text{ZR}}$ <i>nach</i> der Umsetzung .....	344
7.2.2	Typisierung nach genutzten Rechenwegen <i>nach</i> der Umsetzung .....	348
7.2.3	Zur Umsetzung der Ziele des Lernarrangements .....	350
7.2.4	Strategiewahlmodell oder Emergenzmodell? .....	360
7.2.5	Sichtweisen zum Begriff <i>aufgabenadäquat</i> .....	362
7.2.6	Abschließende Bemerkungen .....	366
<b>Literaturverzeichnis</b> .....		369