

Heinz Schade

# Tensoranalysis

**W**  
DE  
**G** Walter de Gruyter  
Berlin • New York 1997

# Inhalt

1	Algebraische Hilfsmittel	1
1.1	Die Einsteinsche Summationskonvention	1
1.2	N-tupel	5
1.2.1	Definitionen	5
1.2.2	Rechenoperationen	6
1.2.3	Lineare Unabhängigkeit	6
1.3	Determinanten	7
1.3.1	Definitionen	7
1.3.2	Berechnung von Determinanten	9
1.3.3	Rechnen mit Determinanten	11
1.4	Kronecker-Symbole	12
1.4.1	$S_{ij}$	12
1.4.2	$S'_{p; ; \wedge}$	14
1.4.3	$e_{...j}$	17
1.4.4	Darstellung einer Determinante mit $\mathfrak{f}; \dots \bullet$	19
1.4.5	$\mathfrak{f}_{,jfe} \bullet \bullet \bullet$	21
1.5	Matrizen	23
1.5.1	Definitionen	23
1.5.2	Rechenoperationen und einfache Folgerungen	24
1.5.3	Gleichungen zwischen Matrizen und Gleichungen zwischen Matrixelementen	29
1.5.4	Elementare Umformungen, Normalform, äquivalente Matrizen, ähnliche Matrizen	30
1.5.5	Orthogonale Matrizen	32
1.6	Algorithmen	33
1.6.1	Berechnung einer Determinante	34
1.6.2	Lösung eindeutiger linearer Gleichungssysteme mit der gleichen Koeffizientenmatrix („Division durch eine reguläre Matrix“, Gauß- scher Algorithmus)	34
1.6.3	Bestimmung des Ranges einer Matrix oder Determinante	35

2	Tensoranalysis in symbolischer Schreibweise und in kartesischen Koordinaten	37
2.1	Kartesische Koordinaten, Punkte, Ortsvektoren	37
2.1.1	Orts Vektoren und Punktkoordinaten	37
2.1.2	Die Transformation kartesischer Koordinatensysteme	38
2.1.3	Eigenschaften der Transformationskoeffizienten	39
2.1.4	Das Transformationsgesetz für Basisvektoren	41
2.1.5	Das Transformationsgesetz für Punktkoordinaten	42
2.2	Vektoren	43
2.2.1	Vektoren, Vektorkomponenten und Vektorkoordinaten	43
2.2.2	Das Transformationsgesetz für Vektorkoordinaten	43
2.3	Tensoren	48
2.3.1	Tensoren zweiter Stufe	48
2.3.2	Tensoren beliebiger Stufe	52
2.3.3	Symmetrien in der Physik	53
2.4	Symbolische Schreibweise, Koordinaten- und Matrzenschreibweise	55
2.5	Gleichheit, Addition und Subtraktion von Tensoren. Multiplikation von Tensoren mit einem Skalar. Lineare Unabhängigkeit	56
2.6	Transponierte, isomere, symmetrische und antimetrische Tensoren	58
2.7	Die tensorielle Multiplikation von Tensoren	60
2.7.1	Definition	60
2.7.2	Eigenschaften	61
2.7.3	Tensoren, Tensorkomponenten und Tensorkoordinaten	65
2.7.4	Tensorgleichungen, Transformationsgleichungen und Darstellungsgleichungen	66
2.8	S-Tensor, e-Tensor, isotrope Tensoren	67
2.8.1	Der 5 Tensor	67
2.8.2	Der e-Tensor	67
2.8.3	Isotrope Tensoren	68
2.9	Die skalare Multiplikation von Tensoren	69
2.9.1	Definition	69
2.9.2	Eigenschaften	70
2.9.3	Überschiebung, Verjüngung, Spur	77
2.9.4	Mehrfache skalare Produkte	77
2.10	Die vektorielle Multiplikation von Tensoren	79
2.10.1	Definition	79
2.10.2	Eigenschaften	83
2.10.3	Das Spatprodukt	84
2.11	Übersicht über die tensoralgebraischen Operationen	85
2.12	Differentialoperationen	86
2.12.1	Der Fundamentalsatz der Tensoranalysis	87
2.12.2	Der Gradient	87

2.12.3 Das (vollständige) Differential . . . . .	91
2.12.4 Die Divergenz . . . . .	92
2.12.5 Die Rotation . . . . .	94
2.12.6 Der Laplace-Operator. . . . .	96
2.13 Indexbilanz und Strichbilanz . . . . .	97
2.14 Integrale von Tensorfeldern. . . . .	97
2.14.1 Kurvenintegrale von Tensorkoordinaten . . . . .	98
2.14.2 Normalenvektor und Flächenvektor eines Flächenelements. . . . .	100
2.14.3 Flächenintegrale von Tensorkoordinaten . . . . .	102
2.14.4 Volumenintegrale von Tensorkoordinaten . . . . .	106
2.14.5 Integrale von Tensorfeldern höherer Stufe. . . . .	107
2.15 Gaußscher und Stokesscher Satz . . . . .	108
2.15.1 Der Gaußsche Satz . . . . .	108
2.15.2 Der Stokessche Satz. . . . .	113
3 Algebra von Tensoren zweiter Stufe . . . . .	119
3.1 Die additive Zerlegung eines Tensors . . . . .	119
3.2 Die Determinante eines Tensors. . . . .	121
3.3 Der Vektor eines antimetrischen Tensors. . . . .	122
3.4 Der Kotensor eines Tensors. . . . .	123
3.5 Der Rang eines Tensors . . . . .	125
3.6 Der inverse Tensor. . . . .	125
3.7 Orthogonale Tensoren. . . . .	127
3.8 Der Tensor als lineare Vektorfunktion. . . . .	128
3.8.1 Rang 3 . . . . .	129
3.8.2 Rang 2 . . . . .	130
3.8.3 Rang 1. . . . .	132
3.8.4 Rang 0 . . . . .	133
3.9 Reziproke Basen . . . . .	133
3.9.1 Definition. . . . .	133
3.9.2 Orthogonalitätsrelationen. . . . .	134
3.9.3 Orthogonale und orthonormierte Basen . . . . .	136
3.9.4 Reziproke Basen in der Ebene. . . . .	137
3.10 Darstellung eines Tensors durch Vektoren . . . . .	137
3.10.1 Rang 3 . . . . .	138
3.10.2 Rang 2 . . . . .	141
3.10.3 Rang 1. . . . .	143
3.11 Eigenwerte und Eigenrichtungen. Die charakteristische Gleichung. . . . .	144
3.11.1 Eigenwerte und Eigenrichtungen . . . . .	144
3.11.2 Charakteristische Gleichung und Hauptinvarianten . . . . .	145
3.11.3 Klassifikation von Tensoren nach der Art ihrer Eigenwerte. . . . .	147

3.11.4 Sätze über Eigenvektoren . . . . .	149
3.11.5 Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer <b>Matrizen</b> . . . . .	156
3.12 Symmetrische Tensoren . . . . .	159
3.12.1 Die Hauptachsentransformation . . . . .	159
3.12.2 Eigenwerte und Rang des Tensors . . . . .	165
3.12.3 Eigenwerte und Definitheit des Tensors . . . . .	165
3.12.4 Symmetrische quadratische Matrizen . . . . .	166
3.13 Orthogonale polare Tensoren . . . . .	168
3.13.1 Die Drehung in der Ebene . . . . .	168
3.13.2 Transformation auf eine Eigenrichtung . . . . .	169
3.13.3 Der orthogonale Tensor als Funktion von Drehachse bzw. Spiegelungsachse und Drehwinkel . . . . .	174
3.13.3.1 Drehung . . . . .	174
3.13.3.2 Spiegelung . . . . .	177
3.13.3.3 Drehspiegelung . . . . .	178
3.13.4 Drehung und Koordinatentransformation . . . . .	179
3.14 Potenzen von Tensoren. Die Hamilton-Cayleysche Gleichung . . . . .	180
3.14.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten . . . . .	180
3.14.2 Potenzen mit reellen Exponenten . . . . .	182
3.14.3 Die Hamilton-Cayleysche Gleichung . . . . .	184
3.15 Tensorinvarianten . . . . .	186
3.16 Die polare Zerlegung eines Tensors . . . . .	188
 4 Tensoranalysis in krummlinigen Koordinaten . . . . .	193
4.1 Krummlinige Koordinaten . . . . .	193
4.1.1 Krummlinige Koordinatensysteme . . . . .	193
4.1.2 Koordinatenflächen und Koordinatenlinien . . . . .	195
4.1.3 Holonome Basen . . . . .	196
4.1.4 Geradlinige und kartesische Koordinatensysteme . . . . .	199
4.1.5 Orthogonale Koordinatensysteme . . . . .	201
4.2 Holonome Tensorkoordinaten . . . . .	201
4.2.1 Allgemeines . . . . .	201
4.2.2 Transformationen zwischen zwei krummlinigen Koordinatensystemen . . . . .	204
4.2.3 Die Einsteinsche Summationskonvention . . . . .	207
4.2.4 Der $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -Tensor . . . . .	208
4.2.4.1 Die holonomen Koordinaten . . . . .	208
4.2.4.2 Eigenschaften der Metrikoeffizienten . . . . .	210
4.2.5 Herauf- und Herunterziehen von Indizes . . . . .	213
4.2.6 Der e-Tensor . . . . .	214
4.2.6.1 Die holonomen Koordinaten . . . . .	214
4.2.6.2 Eigenschaften der holonomen Koordinaten . . . . .	216
4.2.7 Isotrope Tensoren . . . . .	217

4.2.8	Tensoralgebra in holonomen Koordinaten . . . . .	218
4.2.8.1	Gleichheit, Addition und Subtraktion . . . . .	218
4.2.8.2	Transposition, symmetrische und antimetrische Tensoren . . . . .	220
4.2.8.3	Die tensorielle Multiplikation . . . . .	221
4.2.8.4	Die Überschiebung und ihre Spezialfälle . . . . .	222
4.2.8.5	Zusammenfassung . . . . .	223
4.3	Physikalische Basen und Tensorkoordinaten . . . . .	224
4.4	Differentialoperationen . . . . .	227
4.4.1	Partielle Ableitung und vollständiges Differential des Ortsvektors . . . . .	227
4.4.2	Partielle Ableitung und vollständiges Differential der holonomen Basen, Christoffel-Symbole . . . . .	228
4.4.3	Christoffel-Symbole und Metrikkoemzienten . . . . .	229
4.4.4	Die partielle Ableitung von Tensoren. Die partielle und die kovari- ante Ableitung von Tensorkoordinaten . . . . .	231
4.4.5	Das vollständige Differential von Tensoren. Das vollständige und das absolute Differential von Tensorkoordinaten . . . . .	232
4.4.6	Ableitungen nach einem Parameter . . . . .	234
4.4.7	Der Gradient . . . . .	235
4.4.8	Divergenz und Rotation . . . . .	237
4.4.9	Physikalische Koordinaten von Differentialoperationen . . . . .	238
4.4.10	Die zweite kovariante Ableitung einer Tensorkoordinate. Der Laplace-Operator . . . . .	241
4.4.11	Integrale von Tensorfeldern . . . . .	243
4.4.11.1	Kurven-, Flächen- und Volumenelemente . . . . .	243
4.4.11.2	Integrale in krummlinigen Koordinaten . . . . .	245
5	Darstellungstheorie . . . . .	249
5.1	Der Grundgedanke der Darstellungstheorie . . . . .	249
5.2	Ausnutzung von Symmetrien . . . . .	253
5.3	Berücksichtigung von Anisotropien . . . . .	255
5.3.1	Isotropie und allgemeine Anisotropie . . . . .	255
5.3.2	Transversalisotropie . . . . .	256
5.3.3	Zusammenfassung . . . . .	258
6	Der Vektorraum . . . . .	261
6.1	Einfache algebraische Systeme . . . . .	261
6.1.1	Die Halbgruppe . . . . .	261
6.1.2	Die Gruppe . . . . .	263
6.1.3	Der Ring . . . . .	266
6.1.4	Der Körper . . . . .	268

6.2	Der (affine) Vektorraum . . . . .	271
6.2.1	Vektorraum, Nullvektor, Subtraktion . . . . .	271
6.2.2	Lineare Operationen, lineare Kombination, lineare Unabhängigkeit . . . . .	274
6.2.3	Basis und Dimension . . . . .	275
6.2.4	Koordinaten . . . . .	278
6.2.5	Transformationsgleichungen . . . . .	279
6.3	Abbildungen . . . . .	281
6.3.1	Allgemeine Abbildungen . . . . .	281
6.3.2	Lineare Abbildungen . . . . .	282
6.3.3	Tabellarische Zusammenfassung . . . . .	289
6.4	Dualität . . . . .	290
6.4.1	Der Dualraum . . . . .	290
6.4.2	Die natürliche skalare Multiplikation . . . . .	291
6.4.3	Duale Basen . . . . .	294
6.4.4	Transformationsgleichungen . . . . .	294
6.5	Der (affine) Tensorraum . . . . .	296
6.5.1	Die tensorielle Multiplikation . . . . .	296
6.5.2	Affine Tensorräume und Tensoren . . . . .	298
6.5.3	Transformationsgleichungen . . . . .	299
6.6	Der euklidische Vektorraum . . . . .	300
6.6.1	Die skalare Multiplikation . . . . .	300
6.6.2	Die Metrik . . . . .	302
6.6.3	Dualität . . . . .	306
6.7	Der Punkt Raum . . . . .	309
6.7.1	Der affine (Punkt-)Raum . . . . .	309
6.7.2	Der euklidische (Punkt-)Raum . . . . .	311
	Literatur . . . . .	313
	Anhang A	
	Lösungen der Aufgaben . . . . .	315
	Anhang B	
	Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	375
B.1	Zylinderkoordinaten . . . . .	375
B.1.1	Transformationsgleichungen für Punktkoordinaten . . . . .	375
B.1.2	Basen . . . . .	376
B.1.3	Transformationsgleichungen für Tensorkoordinaten . . . . .	376
B.1.4	Einheitstensor und e-Tensor . . . . .	378
B.1.5	Die Christoffel-Symbole . . . . .	379
B.1.6	Differentialoperatoren . . . . .	379
B.1.7	Kurven-, Flächen- und Volumenelemente . . . . .	381

B.2	Kugelkoordinaten . . . . .	382
B.2.1	Transformationsgleichungen für Punktkoordinaten . . . . .	382
B.2.2	Basen . . . . .	383
B.2.3	Transformationsgleichungen für Tensorkoordinaten . . . . .	383
B.2.4	Einheitstensor und e-Tensor . . . . .	386
B.2.5	Die Christoffel-Symbole . . . . .	387
B.2.6	Differentialoperatoren . . . . .	387
B.2.7	Kurven-, Flächen- und Volumenelemente . . . . .	390
	Sachwortregister . . . . .	391