

Inhaltsverzeichnis

1	Regelmäßige Vielecke und Sterne	1
1.1	Eigenschaften regelmäßiger Sterne	1
1.2	Sterne zeichnen.	7
1.3	Diagonalen in einem regelmäßigen n -Eck	9
1.4	Zackenwinkel im regelmäßigen n -zackigen Stern	11
1.5	Aufgesetzte n -zackige Sterne	15
1.6	Regelmäßige n -Ecke in der Gauß'schen Zahlenebene	16
1.7	Spielpläne mithilfe von regelmäßigen n -Ecken aufstellen	21
1.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	23
2	Muster aus bunten Steinen	25
2.1	Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen	25
2.2	Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen	30
2.3	Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen	33
2.4	Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen	35
2.5	Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen	41
2.6	Summe der ersten n Kubikzahlen von natürlichen Zahlen	44
2.7	Pythagoreische Zahlentripel	50
2.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	58
3	Zerlegung von Rechtecken in möglichst große Quadrate	59
3.1	Ein Spiel mit einem Rechteck	59
3.2	Rechnerische Untersuchung des Spiels – Beschreibung mithilfe von Kettenbrüchen	62
3.3	Zusammenhang zwischen der Kettenbruchentwicklung und den Rechteckseiten	64
3.4	Die Zerlegung besonderer Rechtecke – Fibonacci-Rechtecke	65
3.5	Die Folge der Fibonacci-Zahlen	67
3.6	Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus	70
3.7	Beispiele unendlicher Folgen von Rechteckzerlegungen	73

3.8	Bestimmung der Kettenbrüche von Quadratwurzeln	77
3.9	Hinweise auf weiterführende Literatur.	78
4	Kreise und Kreisringe	81
4.1	Die Kreiszahl π – Umfang und Flächeninhalt eines Kreises	81
4.2	Kreisringe	83
4.3	Verschobene Halbkreise	87
4.4	Flechtbänder	90
4.5	Laufbahnen	90
4.6	Hinweise auf weiterführende Literatur.	92
5	Pentominos und ähnliche Puzzles	95
5.1	Einfache Polyominos	95
5.2	Pentominos	98
5.3	Hexominos	106
5.4	Hinweise auf weiterführende Literatur.	107
6	Fadenbilder	109
6.1	Grundfigur Kreis – Seiten und Diagonalen in regelmäßigen Vielecken	109
6.2	Grundfigur Quadrat	111
6.3	Exkurs: Einhüllende einer Funktionenschar.	115
6.4	Verfolgungskurven	120
6.5	Grundfigur Kreis: Epizykloide	122
6.6	Grundfigur zueinander senkrechte Achsen: Astroide	124
6.7	Hinweise auf weiterführende Literatur.	126
7	Rechnen mit Quadratzahlen – Zahlenzyklen	127
7.1	Rechnen mit Quadratzahlen	128
7.2	Zahlenzyklen	135
7.3	Zahlenzyklen modulo n	138
7.4	Zahlenzyklen bei höheren Potenzen.	140
7.5	Hinweise auf weiterführende Literatur.	144
8	Flächenaufteilungen	145
8.1	Fortgesetzte Halbierungen	145
8.2	Fortgesetzte Dreiteilungen	147
8.3	Fortgesetzte Vierteilungen	149
8.4	Fortgesetzte Fünfteilungen	151
8.5	Fortgesetzte Teilungen in n gleich große Teilflächen	153
8.6	Geometrische Folgen und Reihen	154
8.7	Zerlegung von regelmäßigen n -Ecken in gleich große Teilflächen	156
8.8	Hinweise auf weiterführende Literatur.	159

9	Wiegen im 3er-System.	161
9.1	Lösung der einfachen Fälle des Wägeproblems.	162
9.2	Lösung der übrigen Fälle des Wägeproblems	163
9.3	Darstellung natürlicher Zahlen im 3er-System	165
9.4	Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen.	166
9.5	Hinweise auf weiterführende Literatur.	169
10	Parkettieren von regelmäßigen $2n$-Ecken mithilfe von Rauten	171
10.1	Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks	172
10.2	Anwenden der Parkettierungsmethode auf andere regelmäßige $2n$ -Ecke	173
10.3	Verallgemeinerungen der beobachteten Gesetzmäßigkeiten	175
10.4	Anleitung zum Basteln der Rauten-Puzzles	177
10.5	Alternative Auslegungen des regelmäßigen 10-Ecks mit Rauten	178
10.6	Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von innen nach außen.	180
10.7	Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von außen nach innen.	182
10.8	Rauten-Parkettierungen für regelmäßige 5-Ecke, 7-Ecke, 9-Ecke usw.	185
10.9	Hinweise auf weiterführende Literatur.	187
11	Untersuchungen zum Satz von Pick	189
11.1	Eine Regel für Rechtecke	190
11.2	Eine Regel für rechtwinklige Vielecke	192
11.3	Überprüfung der Regel für schräg abgeschnittene Dreiecke	194
11.4	Überlegungen zu einem allgemeinen Beweis des Satzes von Pick	195
11.5	Hinweise auf weiterführende Literatur.	198
12	Augensummen	201
12.1	Augensummen beim Werfen von zwei regelmäßigen Hexaedern	202
12.2	Augensummen beim Werfen von mehreren regelmäßigen Hexaedern	204
12.3	Eine fehlerhafte Vorstellung über Augensummen	206
12.4	Ein faires Würfelspiel mit Augensummen	209
12.5	Die Sicherman-Würfel	210
12.6	Weitere Ersatz-Zufallsgeräte für den Doppelwurf	211
12.7	Algebraischer Hintergrund für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten.	214
12.8	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen beim n -fachen Würfeln	218
12.9	Wahrscheinlichkeitsverteilungen der platonischen Körper	220
12.10	Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichen Augensummen	222

12.11	Ein Beispiel zum Zentralen Grenzwertsatz	224
12.12	Bestimmen von Augensummen mithilfe von Markow-Ketten	227
12.13	Hinweise auf weiterführende Literatur	229
13	Das verschwundene Quadrat	231
13.1	Scheinbar zueinander kongruente Figuren	232
13.2	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Höhensatz des Euklid	237
13.3	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit anderen Methoden Euklids	242
13.4	Weitere Eigenschaften der Folge der Fibonacci-Zahlen	244
13.5	Anordnung von Sam Loyd	246
13.6	Weitere geeignete Zahlentripel	247
13.7	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras	248
13.8	Hinweise auf weiterführende Literatur	249
14	Zerlegen von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate	251
14.1	Rechtecke, die sich in neun bzw. zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen	252
14.2	Bestimmen der Seitenlängen zu einer gegebenen Zerlegung	254
14.3	Einführung der Bouwkamp-Notation zur Beschreibung einer Zerlegung	258
14.4	Quadrate, die man in lauter verschieden große Quadrate zerlegen kann	261
14.5	Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken	264
14.6	Ein Spiel mit Rechteckzerlegungen	265
14.7	Hinweise auf weiterführende Literatur	266
15	Kissing Circles	269
15.1	Untersuchung sich berührender Kreise mithilfe trigonometrischer Methoden	270
15.2	Der Vier-Kreise-Satz von Descartes	272
15.3	Bestimmung von Beispielen mit ganzzahligen Radien	276
15.4	Pappos-Ketten	280
15.5	Berührende Kreise mit Krümmung 0	283
15.6	Hinweise auf weiterführende Literatur	285
16	Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen	287
16.1	Herleitung von Summenformeln mithilfe arithmetischer Folgen höherer Ordnung	288
16.2	Koeffizientenbestimmung durch Vergleich aufeinanderfolgender Glieder der Summenfolge	295
16.3	Alhazens Herleitung der Summenformeln für höhere Potenzen	297

16.4	Thomas Harriot entdeckt den Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Tetraederzahlen.....	300
16.5	Fermats Entdeckung.....	305
16.6	Pascals Methode zur Bestimmung von Formeln für Potenzsummen...	307
16.7	Darstellung der Potenzsummen-Formeln mithilfe der Bernoulli-Zahlen	309
16.8	Bestimmung von Potenzsummen-Formeln mithilfe der Lagrange-Interpolation.....	310
16.9	Hinweise auf weiterführende Literatur.....	312
17	Der Satz des Pythagoras	313
17.1	Der Satz des Pythagoras und die klassischen Beweise von Euklid	313
17.2	„Schöne“ Beweise des Satzes von Pythagoras.....	319
17.3	Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras	321
17.4	Darstellung der Zerlegungsbeweise mithilfe von Fliesenmustern	325
17.5	Einige Beweise von historischer Bedeutung	326
17.6	Unendliche Folgen im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras	330
17.7	Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras	332
17.8	Die Möndchen des Hippokrates von Chios und andere Kreisfiguren...	333
17.9	Anwendung des Satzes von Pythagoras bei Vierecken	338
17.10	Ganzzahlige Pythagoras-Partner und besondere Pythagoras-Folgen...	339
17.11	Heron'sche Dreiecke	344
17.12	Briefmarken zu Pythagoras	347
17.13	Hinweise auf weiterführende Literatur.....	349
	Allgemeine Hinweise auf geeignete Literatur.....	351
	Sachverzeichnis	353