

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Grundlagen	1
1.1 Mengenlehre	1
1.1.1 Mengenbegriff	2
1.1.2 Mengenoperationen	4
1.1.3 Abbildungen	7
1.2 Logik	12
1.2.1 Aussagenlogik	12
1.2.2 Prädikatenlogik	16
1.2.3 Beweise	21
1.3 Reelle Zahlen	23
1.3.1 Natürliche und ganze Zahlen	23
1.3.2 Rationale Zahlen	33
1.3.3 Reelle Zahlen	40
1.4 Rechnen mit reellen Zahlen	48
1.4.1 Potenzen und Wurzeln	49
1.4.2 Summen und Produkte, Binomischer Lehrsatz	51
1.4.3 Beträge und Ungleichungen	59
1.4.4 Über das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	64
1.5 Reelle Funktionen	71
1.5.1 Notation reeller Funktionen	71
1.5.2 Eigenschaften von reellen Funktionen	74
1.5.3 Umkehrfunktion	79
1.5.4 Verkettung von Funktionen	81
1.5.5 Signum- und Betragsfunktion	83
1.5.6 Polynome und gebrochen-rationale Funktionen	84
1.5.7 Potenz- und Wurzelfunktionen	94
1.5.8 Exponentialfunktionen und Logarithmen	95
1.5.9 Trigonometrische Funktionen	105
1.5.10 Hyperbel- und Areafunktionen	121
1.6 Komplexe Zahlen	124
1.6.1 Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit	125
1.6.2 Komplexe Arithmetik	126
1.6.3 Die Gauß'sche Zahlenebene	127
1.6.4 Euler'sche Gleichung und Polarform komplexer Zahlen	130
1.6.5 Komplexe Wechselstromrechnung*	136
1.6.6 Fundamentalsatz der Algebra	139
1.7 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	144

1.7.1	Lineare Gleichungssysteme	145
1.7.2	Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren	146
1.7.3	Lösen linearer Gleichungssysteme	154
1.7.4	Inverse Matrix und transponierte Matrix	161
1.7.5	Symmetrische und orthogonale Matrizen	166
1.7.6	Dreiecksmatrizen, Bandmatrizen und LR-Zerlegung*	168
1.8	Determinanten	171
1.8.1	Definition und elementare Eigenschaften von Determinanten	172
1.8.2	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	179
1.9	Aufgaben	183
2	Differenzial- und Integralrechnung	195
2.1	Folgen	195
2.1.1	Definition und Grundbegriffe von Folgen	196
2.1.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	200
2.1.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	203
2.1.4	Konvergenzkriterien	206
2.1.5	Die Euler'sche Zahl e als Grenzwert von Folgen	210
2.1.6	Approximation reeller Potenzen	212
2.1.7	Bestimmte Divergenz	212
2.1.8	Häufungspunkte einer Folge*	215
2.1.9	Folgenkompaktheit und Cauchy-Folgen*	216
2.2	Zahlen-Reihen	219
2.2.1	Definition und Konvergenz einer Reihe	220
2.2.2	Rechnen mit konvergenten Reihen	223
2.2.3	Alternativen zur Definition der Reihenkonvergenz	224
2.2.4	Absolute Konvergenz	226
2.2.5	Konvergenzkriterien für Reihen	229
2.3	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	237
2.3.1	Umgebungen und Überdeckungen	237
2.3.2	Grenzwerte von Funktionen	239
2.3.3	Stetigkeit	251
2.3.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	258
2.3.5	Unstetigkeitsstellen	264
2.4	Differenzierbarkeit und Ableitungen	267
2.4.1	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten	268
2.4.2	Ableitungsregeln	274
2.4.3	Newton-Verfahren	283
2.4.4	Das Differenzial	284
2.4.5	Höhere Ableitungen	286
2.5	Zentrale Sätze der Differenzialrechnung	288

2.5.1 Satz von Fermat: notwendige Bedingung für lokale Extrema	288
2.5.2 Mittelwertsätze der Differenzialrechnung	289
2.5.3 Regeln von L'Hospital	294
2.6 Integralrechnung	301
2.6.1 Definition des Integrals	301
2.6.2 Eigenschaften des Integrals	306
2.6.3 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	311
2.6.4 Rechenregeln zur Integration	315
2.6.5 Numerische Integration	330
2.6.6 Uneigentliche Integrale	333
2.6.7 Volumen und Flächen	338
2.7 Satz von Taylor, Kurvendiskussion und Extremalprobleme	342
2.7.1 Taylor-Summen	342
2.7.2 Kurvendiskussion und Extremalprobleme	346
2.8 Potenzreihen	356
2.8.1 Unendliche Taylor-Summen und Potenzreihen	356
2.8.2 Einschub: Funktionenfolgen *	360
2.8.3 Konvergenz von Potenzreihen	369
2.8.4 Differenziation und Integration von Potenzreihen	373
2.8.5 Der Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Taylor-Reihen . .	374
2.8.6 Die komplexe Exponentialfunktion	375
2.9 Aufgaben	377
3 Lineare Algebra	385
3.1 Vektoren in der Ebene und im Raum	385
3.1.1 Vektoren: Grundbegriffe und elementare Rechenregeln	385
3.1.2 Skalarprodukt und Orthogonalität	393
3.1.3 Vektorprodukt und Spatprodukt	399
3.1.4 Anwendungen des Skalar-, Vektor- und Spatprodukts	405
3.2 Analytische Geometrie	407
3.2.1 Geraden in der Ebene und im Raum	408
3.2.2 Ebenen im Raum	415
3.3 Vektorräume	422
3.3.1 Definition des Vektorraums	422
3.3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	429
3.3.3 Skalarprodukt und Norm	438
3.3.4 Orthogonalität, Orthogonal- und Orthonormalsysteme	442
3.4 Lineare Abbildungen	453
3.4.1 Lineare Abbildungen und Matrizen	454
3.4.2 Summe, skalares Vielfaches und Verkettung linearer Abbildungen .	458
3.4.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz	461

3.4.4 Umkehrabbildung und inverse Matrix	468
3.4.5 Koordinaten- und Basistransformationen *	470
3.5 Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	474
3.5.1 Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems	474
3.5.2 Berechnung von linearen elektrischen Netzwerken *	478
3.6 Eigenwerte und Eigenvektoren	487
3.6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren	487
3.6.2 Diagonalisierung von Matrizen *	496
3.7 Aufgaben	500
4 Funktionen mit mehreren Variablen	505
4.1 Grenzwerte und Stetigkeit	507
4.2 Ableitungen von reellwertigen Funktionen mit mehreren Variablen	512
4.2.1 Ableitungsbegriffe	512
4.2.2 Höhere Ableitungen	521
4.2.3 Fehlerrechnung *	525
4.3 Extremwertrechnung	528
4.3.1 Lokale und globale Extrema	528
4.3.2 Extrema unter Nebenbedingungen *	534
4.4 Integralrechnung mit mehreren Variablen	541
4.4.1 Integration über mehrdimensionale Intervalle	541
4.4.2 Integration über Normalbereiche	548
4.4.3 Substitutionsregel	552
4.4.4 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	553
4.5 Vektoranalysis	559
4.5.1 Vektorfelder	559
4.5.2 Kurven	560
4.5.3 Quellen, Senken und Wirbel in Vektorfeldern	563
4.5.4 Kurvenintegrale	565
4.5.5 Satz von Green *	572
4.5.6 Flächenintegrale *	573
4.5.7 Die Sätze von Gauß und Stokes *	576
4.6 Aufgaben	582
5 Gewöhnliche Differenzialgleichungen	585
5.1 Einführung	585
5.1.1 Beispiele für Differenzialgleichungen aus Physik und Technik	586
5.1.2 Grundbegriffe	590
5.1.3 Konstruktion einer Lösung, Existenz und Eindeutigkeit	594
5.1.4 Iterationsverfahren von Picard und Lindelöf	598
5.2 Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen erster Ordnung	599
5.2.1 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	600

5.2.2	Nicht-lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	613
5.3	Lineare Differenzialgleichungssysteme	626
5.3.1	Motivation: Eine Schaltung mit Induktivitäten	626
5.3.2	Grundbegriffe	627
5.3.3	Homogene Lösungen	630
5.3.4	Partikuläre Lösungen	635
5.3.5	Komplexe und mehrfache Eigenwerte *	640
5.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	650
5.4.1	Lösung über ein lineares Differenzialgleichungssystem	650
5.4.2	Lösung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite	656
5.4.3	Schwingungsgleichung *	662
5.4.4	Eine schwingende Saite	667
5.5	Aufgaben	669
6	Fourier-Reihen und Integraltransformationen	673
6.1	Fourier-Reihen	674
6.1.1	Fourier-Koeffizienten und Definition der Fourier-Reihe	675
6.1.2	Sinus- und Kosinus-Form der Fourier-Reihe	681
6.1.3	Komplexwertige Funktionen und Fourier-Koeffizienten	683
6.1.4	Faltung	688
6.1.5	Konvergenz von Fourier-Reihen *	696
6.1.6	Gibbs-Phänomen	706
6.1.7	Entwicklung 2p-periodischer Funktionen	710
6.2	Fourier-Transformation	711
6.2.1	Fourier-Integral	711
6.2.2	Fourier-Umkehrtransformation	715
6.2.3	Fourier-Koeffizienten und Fourier-Transformation	717
6.2.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	718
6.2.5	Faltung	723
6.3	Laplace-Transformation	726
6.3.1	Von der Fourier- zur Laplace-Transformation	726
6.3.2	Rechnen mit der Laplace-Transformation	730
6.3.3	Laplace-Transformation in der Systemtheorie *	742
6.4	Diskrete Fourier-Transformation	750
6.4.1	Ausgangspunkt: Koeffizienten einer Fourier-Reihe	753
6.4.2	Diskrete Fourier-Transformation	756
6.4.3	Diskrete Faltung *	764
6.4.4	FFT-Algorithmus	768
6.4.5	Numerische Berechnung von Fourier-Koeffizienten	773
6.4.6	Abtastsatz für trigonometrische Polynome	775
6.4.7	Leck-Effekt (Leakage) *	783

6.4.8	Numerische Berechnung der Fourier-Transformation	784
6.4.9	Abtastsatz der Fourier-Transformation	785
6.4.10	Leck-Effekt und Fensterfunktionen*	792
6.4.11	Zusammenfassung	793
6.5	Aufgaben	793
7	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	799
7.1	Beschreibende Statistik	800
7.1.1	Grundbegriffe	800
7.1.2	Empirische Verteilungsfunktionen	805
7.1.3	Lageparameter	806
7.1.4	Streuungsparameter	811
7.1.5	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen und Korrelation	814
7.1.6	Lineare Regressionsrechnung	817
7.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	822
7.2.1	Zufallsexperimente und Ereignisse	822
7.2.2	Wahrscheinlichkeit und Satz von Laplace	825
7.2.3	Kombinatorik	828
7.2.4	Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten	833
7.2.5	Zufallsvariablen	841
7.2.6	Lage- und Streuungsparameter von Zufallsvariablen	853
7.2.7	Gesetz der großen Zahlen	862
7.2.8	Zentraler Grenzwertsatz	867
7.3	Schließende Statistik	873
7.3.1	Punktschätzungen	874
7.3.2	Begriffe der Fehlerrechnung*	877
7.3.3	Intervallschätzungen	878
7.3.4	Hypothesentests	886
7.4	Aufgaben	888
Literaturverzeichnis	895	
Index	899	