

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	1
<b>I Banachräume und lineare Operatoren . . . . .</b>	<b>7</b>
1 Banachräume . . . . .	8
1.1 Normen und Metriken . . . . .	8
1.2 Supremums-Normen . . . . .	13
1.3 $L_p$ -Normen und Quotientenräume . . . . .	15
1.4 Aufgaben . . . . .	23
2 Kompakte Mengen . . . . .	26
2.1 Der Satz von Arzelà-Ascoli . . . . .	27
2.2 Separable Räume und ein Approximationssatz . . . . .	31
2.3 Hölder- und Sobolev-Normen . . . . .	35
2.4 Aufgaben . . . . .	38
3 Lineare Operatoren . . . . .	41
3.1 Operatornormen . . . . .	41
3.2 Isomorphien und Fortsetzungen . . . . .	45
3.3 Lineare Operatoren auf endlichdimensionalen Räumen . . . . .	48
3.4 Lineare Integral- und Differentialoperatoren . . . . .	52
3.5 Aufgaben . . . . .	55
4 Kleine Störungen . . . . .	59
4.1 Banachalgebren und Neumannsche Reihe . . . . .	59
4.2 Lineare Integralgleichungen . . . . .	62
4.3 Grundlagen der Spektraltheorie . . . . .	64
4.4 Der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .	69
4.5 Nichtlineare Integralgleichungen . . . . .	71
4.6 Der Satz von Picard-Lindelöf . . . . .	73
4.7 Aufgaben . . . . .	75
<b>II Fourier-Reihen und Hilberträume . . . . .</b>	<b>81</b>
5 Fourier-Reihen und Approximationssätze . . . . .	82
5.1 Der Satz von Fejér . . . . .	85
5.2 Faltung und Dirac-Folgen . . . . .	89
5.3 Der Weierstraßsche Approximationssatz . . . . .	91
5.4 Schwache Ableitungen und Sobolev-Räume . . . . .	93
5.5 Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen . . . . .	99
5.6 Aufgaben . . . . .	101
6 Hilberträume . . . . .	105
6.1 Die Parsevalsche Gleichung . . . . .	108
6.2 Sobolev-Hilberträume und Fourier-Koeffizienten . . . . .	113
6.3 Aufgaben . . . . .	120

7	Lineare Operatoren auf Hilberträumen .....	123
7.1	Lineare Operatoren und Matrizen .....	123
7.2	Orthogonale Projektionen .....	125
7.3	Adjungierte Operatoren .....	130
7.4	Selbstadjungierte und unitäre Operatoren .....	135
7.5	Aufgaben .....	139
III	<b>Prinzipien der Funktionalanalysis .....</b>	143
8	Konsequenzen der Vollständigkeit .....	144
8.1	Der Satz von Baire .....	144
8.2	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit .....	148
8.3	Der Satz von der offenen Abbildung .....	150
8.4	Anwendungen auf Fourier-Reihen .....	155
8.5	Aufgaben .....	158
9	Stetige lineare Funktionale .....	161
9.1	Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach .....	161
9.2	Duale Operatoren und Annihilatoren .....	166
9.3	Kanonische Einbettung und reflexive Räume .....	167
9.4	Beispiele von Dualräumen .....	171
9.5	Stetige Projektionen .....	175
9.6	Aufgaben .....	179
10	Schwache Konvergenz .....	182
10.1	Variationsprobleme .....	182
10.2	Trennung konvexer Mengen .....	186
10.3	Uniform konvexe Räume .....	190
10.4	Schwach konvergente Folgen .....	194
10.5	Schwach konvergente Teilfolgen .....	198
10.6	Aufgaben .....	202
IV	<b>Spektraltheorie kompakter und selbstadjungierter Operatoren ..</b>	207
11	Fredholmoperatoren und kompakte Störungen .....	207
11.1	Kompakte lineare Operatoren .....	208
11.2	Fredholmoperatoren .....	214
11.3	Stabilität des Index .....	219
11.4	Spektren kompakter Operatoren .....	223
11.5	Aufgaben .....	225
12	Spektralzerlegungen .....	229
12.1	Modelle kompakter Operatoren .....	229
12.2	Der Spektralsatz für kompakte normale Operatoren .....	232
12.3	Hilbert-Schmidt-Operatoren .....	237
12.4	Singuläre Zahlen und Schmidt-Darstellungen .....	241
12.5	Schatten-Klassen und Integraloperatoren .....	246

12.6	Aufgaben .....	251
13	Unbeschränkte Operatoren .....	256
13.1	Abgeschlossene Operatoren .....	257
13.2	Adjungierte Operatoren .....	264
13.3	Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren .....	267
13.4	Reguläre Sturm-Liouville-Probleme .....	272
13.5	Evolutionsgleichungen .....	280
13.6	Selbstadjungierte Operatoren und Quantenmechanik .....	283
13.7	Aufgaben .....	287
<b>A</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>291</b>
A.1	Lineare Algebra .....	291
A.2	Metrische Räume und Kompaktheit .....	296
A.3	Maße und Integrale .....	304
A.3.1	Fortsetzung elementarer Integrale .....	306
A.3.2	Konvergenzsätze .....	312
A.3.3	Messbare Mengen und Funktionen .....	314
A.3.4	Die Sätze von Fubini und Tonelli .....	319
A.3.5	Der Rieszsche Darstellungssatz .....	324
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>329</b>	
<b>Index .....</b>	<b>331</b>	