

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
	Literatur	4
2	Hyperreelle Zahlen	5
2.1	Axiomatische Einführung der hyperreellen Zahlen	6
2.1.1	Unendlich große Zahlen	6
2.1.2	Eine zusätzliche Zahl und ihre Auswirkungen	7
2.1.3	Die Axiome	8
2.2	Umgang mit hyperreellen Zahlen	9
2.2.1	Hyperreelle Zahlen als Werkzeug	9
2.2.2	Typen hyperreeller Zahlen	10
2.2.3	Grundrechenregeln für hyperreelle Zahlentypen	11
2.2.4	Veranschaulichung mittels Maßstabsänderungen	12
2.2.5	Unendlichkeitslupe und -fernrohr	13
2.2.6	Vergrößerung von Funktionsgraphen	15
2.2.7	Hyperreelle Zahlen als Dezimalzahlen	17
2.3	Rechnen mit hyperreellen Zahlen	21
2.3.1	Addition und Subtraktion	22
2.3.2	Multiplikation und Division	23
2.3.3	Infinitesimale Nachbarschaft	25
2.3.4	Reeller Teil finiter hyperreeller Zahlen	27
2.3.5	Analyse hyperreeller Terme	29
2.3.6	Infinitesimale Nachbarschaft und Gleichheit	31
2.4	Hyperreelle Zahlen und Folgen reeller Zahlen	34
2.4.1	Zum Begriff der Zahlenfolge	34
2.4.2	Folgen rationaler Zahlen als Schreibweise für reelle Zahlen	35
2.4.3	Folgen reeller Zahlen als Schreibweise für hyperreelle Zahlen	36
2.4.4	Folgentypen und Zahltypen	43
2.5	Erweiterungen von Funktionen und Mengen	46
2.5.1	Absolutbetrag einer hyperreellen Zahl	47
2.5.2	Hyperreelle Erweiterung reeller Funktionen	48

2.5.3	Hyperreelle Erweiterung der Dezimalzahlen	51
2.5.4	Hyperfinite Mengen	52
2.6	Zahlbereiche	55
2.6.1	Zahlbereichserweiterungen allgemein	55
2.6.2	Erweiterung zu den reellen Zahlen	55
2.6.3	Erweiterung zu den hyperreellen Zahlen	58
	Literatur	64
3	Differentialrechnung	65
3.1	Differenzieren von Funktionen nach LEIBNIZ.	66
3.1.1	Tangente und Funktionsgraph	66
3.1.2	Quotient infinitesimaler Differenzen	68
3.1.3	Tangentendefinition	70
3.1.4	Tangentensteigung an beliebiger Stelle	71
3.1.5	Ableitung einer Funktion	72
3.1.6	Stetigkeit einer Funktion	75
3.1.7	Limesschreibweise	76
3.1.8	Differentiale und Differentialquotient	76
3.2	Differentiationsregeln	80
3.2.1	Regeln für rationale Funktionen	80
3.2.2	Regeln für nicht rationale Funktionen	88
3.3	Stetige und differenzierbare Funktionen	96
3.3.1	Eigenschaften stetiger Funktionen	96
3.3.2	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	99
3.4	Zur Bestimmung der Krümmung von Funktionsgraphen	103
3.5	Ableiten von Funktionen nach NEWTON	108
3.5.1	Idee der Fluxionen	108
3.5.2	Begründung der Fluxionsregel	112
3.5.3	Weitere Differentiationsregeln	113
	Literatur	117
4	Integralrechnung	119
4.1	Zwei archimedische Ergebnisse	120
4.1.1	Umformulierungen der archimedischen Beweisstrategie	120
4.1.2	Flächeninhalt eines Parabelsegments	121
4.1.3	Volumen einer Kugel	126
4.2	Das RIEMANN-Integral	127
4.2.1	Bedingungen für Integrierbarkeit	129
4.2.2	Definition von Flächeninhalt	132
4.2.3	Integral einer quadratischen Funktion	139
4.3	Integralfunktionen	142
4.3.1	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	143
4.3.2	Unbestimmtes Integral	147
4.3.3	Integralmittelwert	159

4.4	Integrale in weiteren Kontexten.	165
4.4.1	Rauminhalte von Körpern	166
4.4.2	Bogenlänge von Kurven.	175
4.4.3	Oberflächeninhalte von Körpern	180
4.4.4	Integration in physikalischem Kontext	184
4.5	Numerische Integration	187
4.6	Geschichtliches zur Integralrechnung	193
4.6.1	ARCHIMEDES (ca. 287 bis 212 vor Christus)	193
4.6.2	LEIBNIZ (1646 bis 1716)	207
	Literatur	212
5	Transzendente Funktionen.	213
5.1	Logarithmusfunktionen	213
5.1.1	Der natürliche Logarithmus	213
5.1.2	Eigenschaften des natürlichen Logarithmus	214
5.1.3	Zum Graphen des natürlichen Logarithmus	217
5.1.4	Zum langsamen Wachstum der Logarithmusfunktionen	220
5.1.5	Logarithmisches Differenzieren und Integrieren	223
5.2	Exponentialfunktionen	227
5.2.1	Die Umkehrfunktion zum natürlichen Logarithmus	227
5.2.2	Exponentialfunktionen zu anderen Basen	230
5.2.3	Stetige Fortsetzung einer Exponentialfunktion von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$	232
5.2.4	$\exp_e$ als besondere Exponentialfunktion	235
5.3	Hyperbelfunktionen	238
5.4	Kreisfunktionen	242
5.4.1	Zum Kreis	242
5.4.2	Sinus, Kosinus und Tangens.	243
5.4.3	Die Ableitung von Sinus	245
5.4.4	Die Ableitung von Kosinus	248
5.4.5	Nochmals die Ableitung von Sinus und Kosinus.	248
5.4.6	Integration von Sinus und Kosinus	250
5.4.7	Ableitung und Integral der Tangensfunktion	251
5.5	Die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen.	252
5.5.1	Die Arkuskosinusfunktion	252
5.5.2	Die Arkussinusfunktion	253
5.5.3	Die Arkustangensfunktion	254
	Literatur	256
6	Unendliche Reihen	257
6.1	Exponentialfunktionen nach EULER	257
6.1.1	Von der Darstellung der Exponentialgrößen durch Reihen	258
6.1.2	Berechnung von e nach EULER	259
6.1.3	Eigenschaften der e -Funktion	263

6.2	Unendliche Reihen allgemein	266
6.2.1	Konvergenz von Folgen und Reihen	266
6.2.2	Geometrische Reihen – Achilles und die Schildkröte	267
6.2.3	Weitere Konvergenzkriterien	270
6.2.4	Vom Nutzen divergenter Reihen	276
6.2.5	Potenzreihen.	277
6.3	Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen.	278
	Literatur	287
	Stichwortverzeichnis	289