

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>I Die ersten Zahlen . . . . .</b>	<b>5</b>
1 Entwicklung des Zahlbegriffs – zwei sehr unterschiedliche Ansätze . . . . .	5
2 Entwicklung der Zählkompetenz . . . . .	7
2.1 Erwerb der Zahlwortreihe . . . . .	8
2.2 Zählprinzipien und Konventionen . . . . .	9
2.3 Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe . . . . .	10
2.4 Phasen der prozeduralen Sicherheit . . . . .	12
3 Aspektreichtum der natürlichen Zahlen . . . . .	13
3.1 Vielfältige Zahlaspekte . . . . .	13
3.2 Mathematische Fundierungen . . . . .	16
3.3 Probleme einseitiger Fundierung . . . . .	16
4 Kenntnisse am Ende der Kindergartenzeit/am Schulanfang . . . . .	17
4.1 Simultanerfassung kleiner Mengen . . . . .	17
4.2 Zählen . . . . .	17
4.3 Ziffernkenntnis . . . . .	19
4.4 Kardinalzahlaspekt . . . . .	21
4.5 Ordinalzahlaspekt . . . . .	22
4.6 Maßzahlaspekt . . . . .	22
4.7 Vorgänger/Nachfolger/Größenvergleich . . . . .	23
4.8 Teil-Ganzes-Beziehung . . . . .	24
4.9 Vielseitiger Einsatz von Zahlen in der Umwelt . . . . .	25
4.10 Schlussfolgerungen . . . . .	26
5 Der Zwanzigerraum . . . . .	27
5.1 Erschließung heute – ein Überblick . . . . .	28
5.2 Festigung und Vertiefung des Zählens . . . . .	32
5.3 Zahlen darstellen und erfassen . . . . .	35
5.4 Zahlen zerlegen . . . . .	41
5.5 Zahlen vergleichen und ordnen . . . . .	44
5.5.1 Zahlen – Mengenvergleich . . . . .	44
5.5.2 Reihenfolgen – Ordnungszahlen . . . . .	46
5.6 Die Zahl Null . . . . .	48
5.6.1 Null als Kardinalzahl . . . . .	48
5.6.2 Rückwärtszählen . . . . .	49
5.6.3 Zerlegungen/Null als Rechenzahl . . . . .	50
5.7 Zahlen schreiben . . . . .	51
5.8 Dezimales Stellenwertsystem – erste Vorarbeiten . . . . .	52
5.9 Vertiefung des aspektreichen Vorwissens über die natürlichen Zahlen . . . . .	54

<b>II</b>	<b>Zahlenräume – verständnisbasiert erarbeiten und mathematisch vertiefen . . . . .</b>	57
1	Der Zahlenraum bis 100 . . . . .	58
2	Der Zahlenraum bis 1 000 . . . . .	66
3	Der Zahlenraum bis zu einer Million und mehr . . . . .	71
4	Unsere Zahlschrift – mathematische Grundlagen und Ausblicke . . . . .	80
4.1	Die römische Zahlschrift – ein Kontrastbeispiel . . . . .	80
4.2	Das dezimale Stellenwertsystem . . . . .	82
4.3	Nichtdezimale Stellenwertsysteme – eine Verallgemeinerung . . . . .	84
<b>III</b>	<b>Kopfrechnen . . . . .</b>	87
1	Addition . . . . .	88
1.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern . . . . .	88
1.2	Informelle Lösungsstrategien von Schulanfängern – Zählstrategien . . . . .	88
1.3	Zählstrategien – keineswegs nur bei Schulanfängern . . . . .	90
1.4	Zählstrategien – effizient und problemlos? . . . . .	91
1.5	Kleines Einsundeins . . . . .	92
1.5.1	Grundlegung des Additionsverständnisses . . . . .	92
1.5.2	Rechenstrategien im Zwanzigerraum . . . . .	96
1.5.3	Beziehungsreiches und automatisierendes Üben des Kleinen Einsplus eins . . . . .	101
1.6	Das Gleichheitszeichen – einige Anmerkungen . . . . .	103
1.7	Rechenstrategien im Hunderterraum . . . . .	105
1.8	Fehlerstrategien . . . . .	108
2	Subtraktion . . . . .	109
2.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern . . . . .	109
2.2	Zählstrategien . . . . .	111
2.3	Kleines Einsminuseins . . . . .	114
2.3.1	Grundlegung des Subtraktionsverständnisses . . . . .	114
2.3.2	Rechenstrategien im Zwanzigerraum . . . . .	116
2.3.3	Beziehungsreiches und automatisierendes Üben des Kleinen Einsminuseins . . . . .	117
2.4	Rechenstrategien im Hunderterraum . . . . .	119
2.5	Fehlerstrategien . . . . .	122
3	Multiplikation . . . . .	124
3.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien . . . . .	124
3.2	Grundlegung des Multiplikationsverständnisses . . . . .	128
3.2.1	Zeitlich-sukzessive Handlungen . . . . .	128
3.2.2	Räumlich-simultane Anordnungen . . . . .	129
3.2.3	Kombinatorischer Kontext . . . . .	130
3.2.4	Weitere multiplikative Kontexte . . . . .	132
3.2.5	Resümee . . . . .	134

3.3	Rechengesetze . . . . .	134
3.3.1	Kommutativgesetz . . . . .	135
3.3.2	Assoziativgesetz . . . . .	136
3.3.3	Distributivgesetz . . . . .	137
3.4	Kleines Einmaleins . . . . .	137
3.4.1	Sichere und schnelle Beherrschung notwendig? . . . . .	137
3.4.2	Ganzheitliche oder getrennte Erarbeitung des Kleinen Einmaleins? . . . . .	138
3.4.3	Rechenstrategien . . . . .	139
3.4.4	Vielseitige Erarbeitung und Automatisierung der Einmaleinsreihen . . . . .	142
3.5	Multiplikation im Tausenderraum . . . . .	145
3.6	Fehlerstrategien . . . . .	147
4	Division . . . . .	149
4.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien . . . . .	149
4.2	Grundlegung des Divisionsverständnisses . . . . .	152
4.2.1	Aufteilen . . . . .	153
4.2.2	Verteilen . . . . .	154
4.2.3	Umkehroperation . . . . .	156
4.2.4	Wiederholte Subtraktion . . . . .	156
4.2.5	Multiplikativer Vergleich . . . . .	157
4.2.6	Resümee . . . . .	157
4.3	Rechenstrategien im Hunderterraum . . . . .	159
4.4	Vielseitige Erarbeitung und Festigung von Divisionsaufgaben im Hunderterraum . . . . .	161
4.5	Sonderfall Null . . . . .	163
4.6	Division mit Rest . . . . .	164
4.7	Division im Tausenderraum . . . . .	165
4.8	Fehlerstrategien . . . . .	167
<b>IV</b>	<b>Halbschriftliches Rechnen . . . . .</b>	<b>169</b>
1	Zum Begriff des halbschriftlichen Rechnens . . . . .	170
2	Zur Bedeutung des halbschriftlichen Rechnens . . . . .	170
3	Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens . . . . .	174
3.1	Standardstrategie oder Vielfalt an Strategien? . . . . .	174
3.2	Beispillösungen oder eigene Lösungswege? . . . . .	174
3.3	Notationen beim halbschriftlichen Rechnen . . . . .	175
3.4	Addition . . . . .	177
3.5	Subtraktion . . . . .	180
3.6	Multiplikation . . . . .	184
3.7	Division . . . . .	188
3.8	Zusammenfassender Überblick . . . . .	189

4	Forschungsergebnisse zum halbschriftlichen Rechnen .....	190
4.1	Halbschriftliches Rechnen – flexibles Rechnen? .....	193
4.2	Variationen im Rahmen der wenigen Hauptstrategien? .....	196
4.3	Unterschiede im Erfolg bei den halbschriftlichen Strategien? .....	198
4.4	Charakteristische Fehlerstrategien .....	199
4.5	Halbschriftliches Rechnen – Lieblingsmethode? .....	203
4.6	Unterschiede im Erfolg je nach Rechenmethode? .....	205
4.7	Zur Dominanz der schriftlichen Verfahren nach ihrer Einführung .....	207
5	Stärken und Problembereiche des halbschriftlichen Rechnens .....	208
5.1	Stärken .....	208
5.2	Problembereiche .....	210
6	Konsequenzen für den Unterricht .....	212
<b>V</b>	<b>Schriftliches Rechnen .....</b>	<b>217</b>
1	Brauchen wir heute noch schriftliche Rechenverfahren? .....	218
1.1	Schriftliches Rechnen – mögliche Vorteile .....	219
1.2	Schriftliches Rechnen – mögliche Nachteile .....	221
1.3	Konsequenzen .....	222
2	Addition .....	224
2.1	Verschiedene Zugangswege .....	224
2.1.1	Rechengeld .....	224
2.1.2	Stellenweises Rechnen .....	225
2.1.3	Zehnerblöcke .....	226
2.2	Endform und mathematische Begründung .....	227
2.3	Schwierigkeitsfaktoren .....	228
2.4	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit .....	229
2.5	Überschlagendes und kontrollierendes Rechnen .....	232
2.6	Flexibles Rechnen .....	234
2.7	Vertiefung .....	235
3	Subtraktion .....	237
3.1	Abziehen oder Ergänzen? .....	237
3.2	Verschiedene Zugangswege .....	239
3.2.1	Abziehen mit Entbündeln .....	240
3.2.2	Ergänzen mit Erweitern .....	245
3.2.3	Auffüllen .....	248
3.3	Verschiedene Zugangswege – abschließende Bewertung .....	251
3.4	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit .....	252
3.4.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test .....	253
3.4.2	Systematische und typische Fehlerstrategien .....	256
3.4.3	Ursachen und Förderarbeit .....	258
3.5	Überschlagendes Rechnen .....	261
3.6	Kontrollierendes Rechnen .....	262

3.7	Flexibles Rechnen .....	263
3.8	Vertiefung .....	264
4	Multiplikation .....	267
4.1	Verschiedene Zugangswege .....	268
4.1.1	Wiederholte Addition .....	268
4.1.2	Schrittweises Rechnen .....	271
4.1.3	Gittermethode .....	272
4.2	Der weitere Weg .....	273
4.2.1	Multiplikation mit Vielfachen von 10 .....	273
4.2.2	Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren .....	274
4.3	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit .....	278
4.3.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test .....	278
4.3.2	Systematische Fehlerstrategien .....	280
4.3.3	Typische Fehlerstrategien und ihre Ursachen .....	281
4.3.4	Förderarbeit .....	283
4.4	Überschlagendes Rechnen .....	284
4.5	Kontrollierendes Rechnen .....	285
4.6	Flexibles Rechnen .....	286
4.7	Vertiefung .....	286
5	Division .....	288
5.1	Verschiedene Zugangswege .....	289
5.1.1	Wiederholte Subtraktion .....	289
5.1.2	Verteilen von Geld .....	291
5.1.3	Schrittweises Rechnen .....	293
5.2	Endform bei einstelligem Divisor – Änderung überfällig .....	294
5.3	Der weitere Weg .....	296
5.3.1	Aufgaben mit Nullen .....	296
5.3.2	Division durch Zehnerzahlen .....	297
5.3.3	Division durch mehrstellige Divisoren .....	298
5.4	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit .....	301
5.4.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test .....	301
5.4.2	Systematische Fehlerstrategien und ihre Ursachen .....	302
5.4.3	Typische Fehlerstrategien und ihre Ursachen .....	303
5.4.4	Förderarbeit .....	305
5.5	Überschlagendes Rechnen .....	306
5.6	Kontrollierendes Rechnen .....	309
5.7	Flexibles Rechnen .....	309
5.8	Vertiefung .....	310
VI	Taschenrechner und Computer im Arithmetikunterricht .....	311
1	Taschenrechner .....	312
1.1	Zum Einsatz des Taschenrechners in der Grundschule .....	312
1.2	Einführung des Taschenrechners .....	313

1.3	Kopfrechner gegen Taschenrechner .....	315
1.4	Förderung des überschlagenden Rechnens .....	316
1.5	Entdeckungen mit „defekten“ Taschenrechnern .....	318
1.6	Entdecken und Begründen von Gesetzmäßigkeiten .....	319
1.7	Mathematische Sätze entdecken und begründen .....	321
1.8	Sachaufgaben .....	323
1.9	Der Taschenrechner als Kontrollinstrument .....	323
1.10	Resümee .....	324
2	Computer .....	325
2.1	Umfang und Art des gegenwärtigen Einsatzes .....	325
2.2	Notwendige Voraussetzungen für einen sachgerechten Einsatz .....	327
2.3	Prinzipielle Stärken und Grenzen des Computereinsatzes in der Grundschule .....	329
2.4	Vielfalt und Qualität gegenwärtiger Software – eine kritische Analyse .....	329
2.5	Konsequenzen .....	332
	<b>Literatur .....</b>	<b>335</b>
	<b>Index .....</b>	<b>371</b>