

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Die ersten Zahlen	5
1 Entwicklung des Zahlbegriffs – zwei sehr unterschiedliche Ansätze ..	5
2 Entwicklung der Zählkompetenz	7
2.1 Erwerb der Zahlwortreihe	8
2.2 Zählprinzipien und Konventionen	9
2.3 Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe	10
2.4 Phasen der prozeduralen Sicherheit	12
3 Aspektreichtum der natürlichen Zahlen	13
3.1 Vielfältige Zahlaspekte	13
3.2 Mathematische Fundierungen	16
3.3 Probleme einseitiger Fundierung	16
4 Kenntnisse am Ende der Kindergartenzeit/am Schulanfang	17
4.1 Simultanerfassung kleiner Mengen	17
4.2 Zählen	17
4.3 Ziffernkenntnis	19
4.4 Kardinalzahlaspekt	21
4.5 Ordinalzahlaspekt	22
4.6 Maßzahlaspekt	22
4.7 Vorgänger/Nachfolger/Größenvergleich	23
4.8 Teil-Ganzes-Beziehung	24
4.9 Vielseitiger Einsatz von Zahlen in der Umwelt	25
4.10 Schlussfolgerungen	26
5 Der Zwanzigerraum	27
5.1 Erschließung heute – ein Überblick	28
5.2 Festigung und Vertiefung des Zählens	32
5.3 Zahlen darstellen und erfassen	35
5.4 Zahlen zerlegen	41
5.5 Zahlen vergleichen und ordnen	44
5.5.1 Zahlen – Mengenvergleich	44
5.5.2 Reihenfolgen – Ordnungszahlen	46
5.6 Die Zahl Null	48
5.6.1 Null als Kardinalzahl	48
5.6.2 Rückwärtszählen	49
5.6.3 Zerlegungen/Null als Rechenzahl	50
5.7 Zahlen schreiben	51
5.8 Dezimales Stellenwertsystem – erste Vorarbeiten	52
5.9 Vertiefung des aspektreichen Vorwissens über die natürlichen Zahlen	54

II	Zahlenräume – verständnisbasiert erarbeiten und mathematisch vertiefen	57
1	Der Zahlenraum bis 100	58
2	Der Zahlenraum bis 1 000	66
3	Der Zahlenraum bis zu einer Million und mehr	71
4	Unsere Zahlschrift – mathematische Grundlagen und Ausblicke	80
4.1	Die römische Zahlschrift – ein Kontrastbeispiel	80
4.2	Das dezimale Stellenwertsystem	82
4.3	Nichtdezimale Stellenwertsysteme – eine Verallgemeinerung	84
III	Kopfrechnen	87
1	Addition	88
1.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern	88
1.2	Informelle Lösungsstrategien von Schulanfängern – Zählstrategien	88
1.3	Zählstrategien – keineswegs nur bei Schulanfängern	90
1.4	Zählstrategien – effizient und problemlos?	91
1.5	Kleines Einsundeins	92
1.5.1	Grundlegung des Additionsverständnisses	92
1.5.2	Rechenstrategien im Zwanzigerraum	96
1.5.3	Beziehungsreiches und automatisierendes Üben des Kleinen Einspluseins	101
1.6	Das Gleichheitszeichen – einige Anmerkungen	103
1.7	Rechenstrategien im Hunderterraum	105
1.8	Fehlerstrategien	108
2	Subtraktion	109
2.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern	109
2.2	Zählstrategien	111
2.3	Kleines Einsminuseins	114
2.3.1	Grundlegung des Subtraktionsverständnisses	114
2.3.2	Rechenstrategien im Zwanzigerraum	116
2.3.3	Beziehungsreiches und automatisierendes Üben des Kleinen Einsminuseins	117
2.4	Rechenstrategien im Hunderterraum	119
2.5	Fehlerstrategien	122
3	Multiplikation	124
3.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien	124
3.2	Grundlegung des Multiplikationsverständnisses	128
3.2.1	Zeitlich-sukzessive Handlungen	128
3.2.2	Räumlich-simultane Anordnungen	129
3.2.3	Kombinatorischer Kontext	130
3.2.4	Weitere multiplikative Kontexte	132
3.2.5	Resümee	134

3.3	Rechengesetze	134
3.3.1	Kommutativgesetz	135
3.3.2	Assoziativgesetz	136
3.3.3	Distributivgesetz	137
3.4	Kleines Einmaleins	137
3.4.1	Sichere und schnelle Beherrschung notwendig?	137
3.4.2	Ganzheitliche oder getrennte Erarbeitung des Kleinen Einmaleins?	138
3.4.3	Rechenstrategien	139
3.4.4	Vielseitige Erarbeitung und Automatisierung der Einmaleinsreihen	142
3.5	Multiplikation im Tausenderraum	145
3.6	Fehlerstrategien	147
4	Division	149
4.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien	149
4.2	Grundlegung des Divisionsverständnisses	152
4.2.1	Aufteilen	153
4.2.2	Verteilen	154
4.2.3	Umkehroperation	156
4.2.4	Wiederholte Subtraktion	156
4.2.5	Multiplikativer Vergleich	157
4.2.6	Resümee	157
4.3	Rechenstrategien im Hunderterraum	159
4.4	Vielseitige Erarbeitung und Festigung von Divisionsaufgaben im Hunderterraum	161
4.5	Sonderfall Null	163
4.6	Division mit Rest	164
4.7	Division im Tausenderraum	165
4.8	Fehlerstrategien	167
IV	Halbschriftliches Rechnen	169
1	Zum Begriff des halbschriftlichen Rechnens	170
2	Zur Bedeutung des halbschriftlichen Rechnens	170
3	Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens	174
3.1	Standardstrategie oder Vielfalt an Strategien?	174
3.2	Beispiellösungen oder eigene Lösungswege?	174
3.3	Notationen beim halbschriftlichen Rechnen	175
3.4	Addition	177
3.5	Subtraktion	180
3.6	Multiplikation	184
3.7	Division	188
3.8	Zusammenfassender Überblick	189

4	Forschungsergebnisse zum halbschriftlichen Rechnen	190
4.1	Halbschriftliches Rechnen – flexibles Rechnen?	193
4.2	Variationen im Rahmen der wenigen Hauptstrategien?	196
4.3	Unterschiede im Erfolg bei den halbschriftlichen Strategien?	198
4.4	Charakteristische Fehlerstrategien	199
4.5	Halbschriftliches Rechnen – Lieblingsmethode?	203
4.6	Unterschiede im Erfolg je nach Rechenmethode?	205
4.7	Zur Dominanz der schriftlichen Verfahren nach ihrer Einführung	207
5	Stärken und Problembereiche des halbschriftlichen Rechnens	208
5.1	Stärken	208
5.2	Problembereiche	210
6	Konsequenzen für den Unterricht	212
V	Schriftliches Rechnen	217
1	Brauchen wir heute noch schriftliche Rechenverfahren?	218
1.1	Schriftliches Rechnen – mögliche Vorteile	219
1.2	Schriftliches Rechnen – mögliche Nachteile	221
1.3	Konsequenzen	222
2	Addition	224
2.1	Verschiedene Zugangswege	224
2.1.1	Rechengeld	224
2.1.2	Stellenweises Rechnen	225
2.1.3	Zehnerblöcke	226
2.2	Endform und mathematische Begründung	227
2.3	Schwierigkeitsfaktoren	228
2.4	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit	229
2.5	Überschlagendes und kontrollierendes Rechnen	232
2.6	Flexibles Rechnen	234
2.7	Vertiefung	235
3	Subtraktion	237
3.1	Abziehen oder Ergänzen?	237
3.2	Verschiedene Zugangswege	239
3.2.1	Abziehen mit Entbündeln	240
3.2.2	Ergänzen mit Erweitern	245
3.2.3	Auffüllen	248
3.3	Verschiedene Zugangswege – abschließende Bewertung	251
3.4	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit	252
3.4.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test	253
3.4.2	Systematische und typische Fehlerstrategien	256
3.4.3	Ursachen und Förderarbeit	258
3.5	Überschlagendes Rechnen	261
3.6	Kontrollierendes Rechnen	262

	3.7	Flexibles Rechnen	263
	3.8	Vertiefung	264
4		Multiplikation	267
	4.1	Verschiedene Zugangswege	268
	4.1.1	Wiederholte Addition	268
	4.1.2	Schrittweises Rechnen	271
	4.1.3	Gittermethode	272
	4.2	Der weitere Weg	273
	4.2.1	Multiplikation mit Vielfachen von 10	273
	4.2.2	Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren	274
	4.3	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit	278
	4.3.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test	278
	4.3.2	Systematische Fehlerstrategien	280
	4.3.3	Typische Fehlerstrategien und ihre Ursachen	281
	4.3.4	Förderarbeit	283
	4.4	Überschlagendes Rechnen	284
	4.5	Kontrollierendes Rechnen	285
	4.6	Flexibles Rechnen	286
	4.7	Vertiefung	286
5		Division	288
	5.1	Verschiedene Zugangswege	289
	5.1.1	Wiederholte Subtraktion	289
	5.1.2	Verteilen von Geld	291
	5.1.3	Schrittweises Rechnen	293
	5.2	Endform bei einstelligem Divisor – Änderung überfällig	294
	5.3	Der weitere Weg	296
	5.3.1	Aufgaben mit Nullen	296
	5.3.2	Division durch Zehnerzahlen	297
	5.3.3	Division durch mehrstellige Divisoren	298
	5.4	Fehlerstrategien, Ursachen, Förderarbeit	301
	5.4.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test	301
	5.4.2	Systematische Fehlerstrategien und ihre Ursachen	302
	5.4.3	Typische Fehlerstrategien und ihre Ursachen	303
	5.4.4	Förderarbeit	305
	5.5	Überschlagendes Rechnen	306
	5.6	Kontrollierendes Rechnen	309
	5.7	Flexibles Rechnen	309
	5.8	Vertiefung	310
VI		Taschenrechner und Computer im Arithmetikunterricht	311
1		Taschenrechner	312
	1.1	Zum Einsatz des Taschenrechners in der Grundschule	312
	1.2	Einführung des Taschenrechners	313

1.3	Kopfrechner gegen Taschenrechner	315
1.4	Förderung des überschlagenden Rechnens	316
1.5	Entdeckungen mit „defekten“ Taschenrechnern	318
1.6	Entdecken und Begründen von Gesetzmäßigkeiten	319
1.7	Mathematische Sätze entdecken und begründen	321
1.8	Sachaufgaben	323
1.9	Der Taschenrechner als Kontrollinstrument	323
1.10	Resümee	324
2	Computer	325
2.1	Umfang und Art des gegenwärtigen Einsatzes	325
2.2	Notwendige Voraussetzungen für einen sachgerechten Einsatz	327
2.3	Prinzipielle Stärken und Grenzen des Computereinsatzes in der Grundschule	329
2.4	Vielfalt und Qualität gegenwärtiger Software – eine kritische Analyse	329
2.5	Konsequenzen	332
Literatur		335
Index		371