

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Symbolverzeichnis	XV
Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet	XVI
1 Grundlagen und Hilfsmittel	1
1.1 Mengen und Aussagen	1
1.1.1 Mengenbegriff	1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen	3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen	4
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen	8
1.1.4.1 Konjunktion	8
1.1.4.2 Disjunktion	9
1.1.4.3 Negation	10
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen	10
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz	13
1.1.5.1 Folgerung (Implikation)	13
1.1.5.2 Äquivalenz	14
1.1.6 Relationen zwischen Mengen	15
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen	15
1.1.6.2 Teilmengen	15
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen	16
1.1.7.1 Durchschnittsmenge	16
1.1.7.2 Vereinigungsmenge	17
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge)	17
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen	20
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen	21
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in IR	22
1.2.1.1 Axiome	22
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen	24
1.2.1.3 Betrag einer Zahl	29
1.2.1.4 Das Summenzeichen	29
1.2.1.5 Das Produktzeichen	31
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient	32
1.2.2 Potenzen	34
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten	34
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	36
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln	37

1.2.3	1.2.2.4 Potenzen mit reellen Exponenten	40
	Logarithmen	42
	1.2.3.1 Begriff des Logarithmus	42
	1.2.3.2 Logarithmenbasen	43
	1.2.3.3 Rechenregeln für Logarithmen	44
	1.2.3.4 Logarithmen zu beliebiger Basis	46
1.2.4	Gleichungen	47
	1.2.4.1 Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen	47
	1.2.4.2 Äquivalenzumformungen	50
	1.2.4.3 Lineare Gleichungen $ax + b = cx + d$	54
	1.2.4.4 Lineare Gleichungssysteme (LGS)	55
	1.2.4.5 Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$	59
	1.2.4.6 Gleichungen höheren als zweiten Grades	62
	1.2.4.7 Wurzelgleichungen	65
	1.2.4.8 Exponentialgleichungen	66
	1.2.4.9 Logarithmengleichungen	67
	1.2.4.10 Bruchgleichungen	67
1.2.5	Ungleichungen	69
1.2.6	Wo steckt der Fehler?	72
	1.2.6.1 Fehler bei Termumformungen	73
	1.2.6.2 Fehler bei der Lösung von Gleichungen	74
	1.2.6.3 Fehler bei der Lösung von Ungleichungen	76
2	Funktionen einer unabhängigen Variablen	77
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen	77
	2.1.1 Funktionsbegriff	77
	2.1.2 Graphische Darstellung von Funktionen	82
	2.1.3 Abschnittsweise definierte Funktionen	87
	2.1.4 Umkehrfunktionen	89
	2.1.5 Implizite Funktionen	94
	2.1.6 Verkettete Funktionen	95
2.2	Eigenschaften von Funktionen	96
	2.2.1 Beschränkte Funktionen	96
	2.2.2 Monotone Funktionen	97
	2.2.3 Symmetrische Funktionen	99
	2.2.4 Nullstellen von Funktionen	100
2.3	Elementare Typen von Funktionen	100
	2.3.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	100
	2.3.1.1 Grundbegriffe, Horner-Schema	101
	2.3.1.2 Konstante und lineare Funktionen	102
	2.3.1.3 Quadratische Funktionen	109
	2.3.1.4 Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung	111
	2.3.2 Gebrochen-rationale Funktionen	114

2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen)	116
2.3.4	Exponentialfunktionen	118
2.3.5	Logarithmusfunktionen	120
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen)	121
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi)	127
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen	131
3	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	153
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen ..	153
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen	154
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	163
4	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	167
4.1	Der Grenzwertbegriff	167
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$	168
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) ..	172
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen	178
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen	181
4.4	Der Stetigkeitsbegriff	185
4.5	Unstetigkeitstypen	187
4.6	Stetigkeitsanalyse	189
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen	192
4.8	Asymptoten	195
5	Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik	199
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung	199
5.1.1	Problemstellung	199
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient	199
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient)	201
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	205
5.2	Technik des Differenzierens	206
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen	207
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$..	207
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$	207
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$..	208
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$..	209
5.2.2	Ableitungsregeln	211
5.2.2.1	Faktorregel	211

5.2.2.2	Summenregel	211
5.2.2.3	Produktregel	212
5.2.2.4	Quotientenregel	213
5.2.2.5	Kettenregel	215
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik	218
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion	218
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen	220
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung	222
5.2.4	Höhere Ableitungen	223
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differenzierungsregeln	225
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de L'Hôpital	226
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion	233
6	Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	237
6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung	237
6.1.1	Das Differential einer Funktion	237
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion	240
6.1.2.1	Grenzkosten	242
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben)	243
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag)	244
6.1.2.4	Grenzgewinn	246
6.1.2.5	Marginale Konsumquote	247
6.1.2.6	Marginale Sparquote	247
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution	248
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion	249
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen	252
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten	253
6.2.2	Extremwerte	256
6.2.3	Wendepunkte	260
6.2.4	Kurvendiskussion	262
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen	268
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme	270
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen	270
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen	271
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften	274

6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen	276
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse	277
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen	280
6.3.2.3	Gewinnmaximierung	282
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion	289
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung	291
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen	301
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen	301
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen	303
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen	308
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität	314
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung	319
7	Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	325
7.1	Grundlagen	325
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen	325
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	330
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung	331
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen	333
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential	335
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung	337
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen	340
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	344
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen	344
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	346
7.2.2.1	Problemstellung	346
7.2.2.2	Variablensubstitution	348
7.2.2.3	Lagrange-Methode	348
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	352
7.3.1	Partielle Elastizitäten	352
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität	352
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation	353
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen	354
7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes	357
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen)	362
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion	362

7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen	366
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung	371
7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	374
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen	377
7.3.3.1	Minimalkostenkombination	377
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion	383
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum ...	387
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen	393
8	Einführung in die Integralrechnung	401
8.1	Das unbestimmte Integral	401
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	401
8.1.2	Grundintegrale	404
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	405
8.2	Das bestimmte Integral	407
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals	407
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals	409
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals ...	410
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	412
8.3.1	Integralfunktion	412
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	413
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	415
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung	416
8.4	Spezielle Integrationstechniken	418
8.4.1	Partielle Integration	419
8.4.2	Integration durch Substitution	420
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung	422
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen	422
8.5.2	Die Konsumentenrente	425
8.5.3	Die Produzentenrente	426
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme	428
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft ...	432
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen	433
8.6	Elementare Differentialgleichungen	437
8.6.1	Einleitung	437
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen	438

8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen	441
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum	441
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität	441
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow	443
9	Einführung in die Lineare Algebra	449
9.1	Matrizen und Vektoren	449
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung	449
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren	453
9.1.3	Operationen mit Matrizen	454
9.1.3.1	Addition von Matrizen	454
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor	456
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)	458
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen	459
9.1.4	Die inverse Matrix	466
9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse)	468
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	473
9.2.1	Grundbegriffe	473
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus	475
9.2.3	Pivotisieren	481
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	486
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix	491
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme	493
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung	493
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung	495
10	Lineare Optimierung (LO)	499
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode	499
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung	499
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems ..	500
10.1.3	Ein Diät-Problem	502
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems	503
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung	505
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung	508
10.2	Simplexverfahren	510
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems ..	510
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens	512
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen	512

10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen	513
10.2.5	Optimalitätskriterium	515
10.2.6	Engpassbedingung	516
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung	518
10.2.8	Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem)	519
10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme	521
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen	528
10.4.1	Keine zulässige Lösung	528
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung)	529
10.4.3	Degeneration (Entartung)	529
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen	531
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen	533
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall	534
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus	535
10.5.1	Produktionsplanungsproblem	535
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten	535
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung	537
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten	537
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten	538
10.5.1.5	Zusammenfassung	540
10.5.2	Diätproblem	541
10.6	Dualität	542
10.6.1	Das duale LO-Problem	542
10.6.2	Dualitätssätze	545
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems	548
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems	548
10.7.2	Dual eines Diätproblems	550
11	Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben	553
12	Literaturverzeichnis	585
13	Sachwortverzeichnis	589