

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	<b>XV</b>
<b>Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet</b> .....	<b>XVI</b>
<b>1 Grundlagen und Hilfsmittel</b> .....	<b>1</b>
1.1 Mengen und Aussagen .....	1
1.1.1 Mengenbegriff .....	1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen .....	3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen .....	4
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen .....	8
1.1.4.1 Konjunktion .....	8
1.1.4.2 Disjunktion .....	9
1.1.4.3 Negation .....	10
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen .....	10
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz .....	13
1.1.5.1 Folgerung (Implikation) .....	13
1.1.5.2 Äquivalenz .....	14
1.1.6 Relationen zwischen Mengen .....	15
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen .....	15
1.1.6.2 Teilmengen .....	15
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen .....	16
1.1.7.1 Durchschnittsmenge .....	16
1.1.7.2 Vereinigungsmenge .....	17
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge) .....	17
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen .....	20
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen .....	21
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in $\mathbb{R}$ .....	22
1.2.1.1 Axiome .....	22
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen ...	24
1.2.1.3 Betrag einer Zahl .....	29
1.2.1.4 Das Summenzeichen .....	29
1.2.1.5 Das Produktzeichen .....	31
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient .....	32
1.2.2 Potenzen .....	34
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten .....	34
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .....	36
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln .....	37

1.2.2.4	Potenzen mit reellen Exponenten .....	40
1.2.3	Logarithmen .....	42
1.2.3.1	Begriff des Logarithmus .....	42
1.2.3.2	Logarithmenbasen .....	43
1.2.3.3	Rechenregeln für Logarithmen .....	44
1.2.3.4	Logarithmen zu beliebiger Basis .....	46
1.2.4	Gleichungen .....	47
1.2.4.1	Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen .....	47
1.2.4.2	Äquivalenzumformungen .....	50
1.2.4.3	Lineare Gleichungen $ax + b = cx + d$ .....	54
1.2.4.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS) .....	55
1.2.4.5	Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ ....	59
1.2.4.6	Gleichungen höheren als zweiten Grades .....	62
1.2.4.7	Wurzelgleichungen .....	65
1.2.4.8	Exponentialgleichungen .....	66
1.2.4.9	Logarithmengleichungen .....	67
1.2.4.10	Bruchgleichungen .....	67
1.2.5	Ungleichungen .....	69
1.2.6	Wo steckt der Fehler? .....	72
1.2.6.1	Fehler bei Termumformungen .....	73
1.2.6.2	Fehler bei der Lösung von Gleichungen .....	74
1.2.6.3	Fehler bei der Lösung von Ungleichungen .....	76
<b>2</b>	<b>Funktionen einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>77</b>
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen .....	77
2.1.1	Funktionsbegriff .....	77
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen .....	82
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen .....	87
2.1.4	Umkehrfunktionen .....	89
2.1.5	Implizite Funktionen .....	94
2.1.6	Verkettete Funktionen .....	95
2.2	Eigenschaften von Funktionen .....	96
2.2.1	Beschränkte Funktionen .....	96
2.2.2	Monotone Funktionen .....	97
2.2.3	Symmetrische Funktionen .....	99
2.2.4	Nullstellen von Funktionen .....	100
2.3	Elementare Typen von Funktionen .....	100
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) .....	100
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema .....	101
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen .....	102
2.3.1.3	Quadratische Funktionen .....	109
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung .....	111
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen .....	114

2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) .....	116
2.3.4	Exponentialfunktionen .....	118
2.3.5	Logarithmusfunktionen .....	120
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen) .....	121
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi) .....	127
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen .....	131
<b>3</b>	<b>Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....</b>	<b>153</b>
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .	153
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen .....	154
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	163
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen .....</b>	<b>167</b>
4.1	Der Grenzwertbegriff .....	167
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ .....	168
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$ ) ...	172
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen .....	178
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen .....	181
4.4	Der Stetigkeitsbegriff .....	185
4.5	Unstetigkeitstypen .....	187
4.6	Stetigkeitsanalyse .....	189
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen .....	192
4.8	Asymptoten .....	195
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik .....</b>	<b>199</b>
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung .....	199
5.1.1	Problemstellung .....	199
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient .....	199
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient) .....	201
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit .....	205
5.2	Technik des Differenzierens .....	206
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen .....	207
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$ ...	207
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ .....	207
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ...	208
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ .	209
5.2.2	Ableitungsregeln .....	211
5.2.2.1	Faktorregel .....	211

5.2.2.2	Summenregel .....	211
5.2.2.3	Produktregel .....	212
5.2.2.4	Quotientenregel .....	213
5.2.2.5	Kettenregel .....	215
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik .....	218
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion .....	218
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	220
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung .....	222
5.2.4	Höhere Ableitungen .....	223
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln	225
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de L'Hôpital .....	226
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion .....	233

## **6 Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen .....**

6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung .....	237
6.1.1	Das Differential einer Funktion .....	237
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion .....	240
6.1.2.1	Grenzkosten .....	242
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) ....	243
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag) .....	244
6.1.2.4	Grenzgewinn .....	246
6.1.2.5	Marginale Konsumquote .....	247
6.1.2.6	Marginale Sparquote .....	247
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution .....	248
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion ....	249
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen .....	252
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten .....	253
6.2.2	Extremwerte .....	256
6.2.3	Wendepunkte .....	260
6.2.4	Kurvendiskussion .....	262
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen ....	268
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme .....	270
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen .....	270
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen .....	271
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften .....	274

6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen ...	276
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse .....	277
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen .....	280
6.3.2.3	Gewinnmaximierung .....	282
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion .....	289
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung .....	291
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen .....	301
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen .....	301
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen .....	303
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen .....	308
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität .....	314
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung .....	319

## **7 Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen** .....

7.1	Grundlagen .....	325
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen ....	325
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen ....	330
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung .....	331
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen .....	333
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential .....	335
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung .....	337
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen .....	340
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	344
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen .....	344
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen .....	346
7.2.2.1	Problemstellung .....	346
7.2.2.2	Variablensubstitution .....	348
7.2.2.3	Lagrange-Methode .....	348
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	352
7.3.1	Partielle Elastizitäten .....	352
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität .....	352
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation .....	353
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen .....	354
7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes .....	357
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen) .....	362
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion ....	362

7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmen .....	366
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung .....	371
7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate .....	374
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen .....	377
7.3.3.1	Minimalkostenkombination .....	377
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion .....	383
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum ...	387
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen .....	393
<b>8</b>	<b>Einführung in die Integralrechnung .....</b>	<b>401</b>
8.1	Das unbestimmte Integral .....	401
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	401
8.1.2	Grundintegrale .....	404
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral .....	405
8.2	Das bestimmte Integral .....	407
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals .....	407
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals .....	409
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals ....	410
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	412
8.3.1	Integralfunktion .....	412
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	413
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	415
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung .....	416
8.4	Spezielle Integrationstechniken .....	418
8.4.1	Partielle Integration .....	419
8.4.2	Integration durch Substitution .....	420
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung .....	422
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen .....	422
8.5.2	Die Konsumentenrente .....	425
8.5.3	Die Produzentenrente .....	426
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme .....	428
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft ...	432
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen .....	433
8.6	Elementare Differentialgleichungen .....	437
8.6.1	Einleitung .....	437
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen .....	438

8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen .....	441
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum .....	441
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität .....	441
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow ..	443
<b>9</b>	<b>Einführung in die Lineare Algebra .....</b>	<b>449</b>
9.1	Matrizen und Vektoren .....	449
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung .....	449
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren .....	453
9.1.3	Operationen mit Matrizen .....	454
9.1.3.1	Addition von Matrizen .....	454
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor .....	456
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt) .....	458
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen .....	459
9.1.4	Die inverse Matrix .....	466
9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse) .....	468
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS) .....	473
9.2.1	Grundbegriffe .....	473
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus .....	475
9.2.3	Pivotisieren .....	481
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme .....	486
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix .....	491
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme .....	493
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung ....	493
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung .....	495
<b>10</b>	<b>Lineare Optimierung (LO) .....</b>	<b>499</b>
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode .....	499
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung .....	499
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems ..	500
10.1.3	Ein Diät-Problem .....	502
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems .....	503
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung .....	505
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung .....	508
10.2	Simplexverfahren .....	510
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems .	510
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens .....	512
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen .....	512

10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen .....	513
10.2.5	Optimalitätskriterium .....	515
10.2.6	Engpassbedingung .....	516
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung .....	518
10.2.8	Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem) .....	519
10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme .....	521
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen .....	528
10.4.1	Keine zulässige Lösung .....	528
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung) .....	529
10.4.3	Degeneration (Entartung) .....	529
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen .....	531
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen .....	533
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall .....	534
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus	535
10.5.1	Produktionsplanungsproblem .....	535
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten .....	535
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung .....	537
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten .....	537
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten .....	538
10.5.1.5	Zusammenfassung .....	540
10.5.2	Diätproblem .....	541
10.6	Dualität .....	542
10.6.1	Das duale LO-Problem .....	542
10.6.2	Dualitätssätze .....	545
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems .....	548
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems .....	548
10.7.2	Dual eines Diätproblems .....	550
<b>11</b>	<b>Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben .....</b>	<b>553</b>
<b>12</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>585</b>
<b>13</b>	<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>589</b>