

Inhaltsverzeichnis

Finite Differenzen

0 Allgemeine Grundlagen

0.1	Zur Schreibweise	3
0.2	Synonyma des Wortes "Definitionsbereich"	3
0.3	Nebenbedingungen	4
0.4	Zur Klassifizierung partieller Differentialgleichungen	4
0.5	Iteration	5
0.6	Matrizen und Gauß-Elimination	6
0.7	Gestaffelte Systeme, Dreiecksmatrizen, LR-Zerlegung	9

1 Grundlagen der Differenzenmethode

1.1	Prinzip und einfachste Formeln	12
1.2	Die Formel von Taylor	13
1.3	Approximation der ersten Ableitung	14
1.4	Approximation der zweiten Ableitung	15
1.5	Explizite und implizite Systeme	16
1.6	Stabile und instabile Systeme	18
1.7	Stabilität im Sinne John von Neumanns	20
1.8	Elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen	22
1.9	Gitter und Randbedingungen	23

1.10 Unregelmäßige Gitter. Mehrgitterverfahren	
Lokale Netzverfeinerung	25
1.11 Höhere Ableitungen auf quadratischen Gittern	29
1.12 Differenzenformeln hoher Genauigkeit	30
1.13 Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	
Eichung/history matching. Stream weighting	32
1.14 Numerische Dispersion 1	33
1.15 Numerische Dispersion 2	34
1.16 Neun-Punkte Formeln für den Laplace Operator	36
1.17 Herleitung der Neun-Punkte Formel $D(p,u)$	38
1.18 Praktische Fragen	40
1.19 Fehlernormen	41
1.20 Diskretisierung der selbstadjungierten Form $(Ku_x)_x$	43
1.21 Das Liebmannsche Mittelungsverfahren: Ein elementares klassisches Beispiel der Differenzenmethode	44
1.22 Literatur	46
2 Parabolische Gleichungen I	
2.1 Zusammenfassung	49
2.2 Lineare tridiagonale Systeme	
Das Programm Algorithmus TRIDIA	49
2.3 Nichtlineare tridiagonale Systeme	51
2.4 Implizite Lösung von $u_{xx} + Q(x,t) = cu_t$	52
2.5 Randbedingungen	53
2.6 Das Programm implizit.f77	55
2.7 Die Crank-Nicolson Variante CN. Das Programm cranknic.f77	56
2.8 Die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} + Q(x,y,t) = cu_t$. ADIP	57
2.9 Das ADIP-Programm adipr.f77 auf Rechteckgebieten	60
2.10 Die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + Q(x,y,z,t) = cu_t$	62
2.11 Nichtlinearitäten, Nichtrechteckgebiete und Anisotropie	62
2.12 Explizite Lösung der 2- und 3-dimensionalen Gleichung	64
2.13 Literatur	64

3 Elliptische Gleichungen

3.1	Zusammenfassung	67
3.2	Bandmatrizen	
	Der Gauß-Algorithmus BANDMATRIX	67
3.3	Direkte Lösung der Gleichungen von Laplace und Poisson mit hoher Genauigkeit	69
3.4	Das Programm poisson1.f77	72
3.5	Ein einfaches Mehrgitterverfahren für die Gleichungen von Poisson und Laplace	73
3.6	Das Programm multigrid.f77	76
3.7	Die Gleichung von Helmholtz	77
3.8	Fehlerabschätzung nach Richardson	78
3.9	Die nichtlineare selbstadjungierte elliptisch-parabolische Gleichung auf inhomogenen, unregelmäßig berandeten Gebieten	78
3.10	Die selbstadjungierte elliptische bzw. parabolische Differenzengleichung	80
3.11	Die Koeffizienten S und T	81
3.12	Die Randbedingungen	82
3.13	Das Programm adjung.f77	83
3.14	Lösung elliptischer Gleichungen mit adjung.f77	85
3.15	Die Austauschbarkeit elliptischer und parabolischer Programme	86
3.16	Douglas-Rachford iterativ (DRI)	86
3.17	Die Biharmonische $\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = 0$	87
3.18	Literatur	87

4 Hyperbolische Gleichungen

4.1	Zusammenfassung	89
4.2	Charakteristiken	89
4.3	Die Gleichung $a(x,y)u_{xx} - c(x,y)u_{yy} = g(x,y)u + f(x,y)$ mit $a(x,y) > 0$ und $c(x,y) > 0$	91
4.4	Die Wellengleichungen $u_{tt} = \mu u_{xx} + f$, $u_{tt} = \mu(u_{xx} + u_{yy}) + f$ und $u_{tt} = \mu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$ mit $\mu = c^2$	92

4.5	Die Bestimmung der zulässigen Maschenweiten für Wellengleichungen. Das Kriterium von Courant, Friedrichs und Lewy	93
4.6	Das Programm welle.f77 für 2D-Wellengleichungen	95
4.7	Die Charakteristiken der quasilinearen Gleichung erster Ordnung	96
4.8	Die Charakteristiken quasilinearer Systeme erster Ordnung	98
4.9	Die Lösung hyperbolischer kanonischer Systeme	99
4.10	Beweis der Konvergenz der Näherungslösung	100
4.11	Systeme vom Telegraphengleichungstyp	101
4.12	Gleichungen und Systeme vom Typ $u_t = -\beta(x,t)v_x$	102
4.13	Das Programm utvx.f77	103
4.14	Numerische Längsdispersion 1	104
4.15	Das Lax-Wendroff Schema	106
4.16	Das Programm laxwf.f77	107
4.17	Numerische Längsdispersion 2	107
4.18	Integration der Gleichung $u_x + v_y = 0$	109
4.19	Literatur	110

5 Parabolische Gleichungen II

5.1	Zusammenfassung	112
5.2	Die SOR-Methode zur Lösung linearer Gleichungen Die Verfahren von Jacobi und Gauß-Seidel	112
5.3	Neun-Punkte Formel des Operators $(Tu_x)_x + (Tu_y)_y$ Minimalisierung der numerischen Querdispersion	117
5.4	Mehrdimensionale Grundgebiete beliebiger und wechselnder Gestalt. Gitterabtastung. Dreidimensionale Differentialgleichungen auf beliebigen Bereichen	118
5.5	Das Generalprogramm gebiet.f77 für selbstadjungierte Gleichungen auf beliebigen zweidimensionalen Definitionsbereichen mit Dispersionsminimalisierung	127
5.6	Das Arbeiten mit dem Generalprogramm gebiet.f77	129
5.7	Die Konvektions-Diffusionsgleichung auf beliebigen dreidimensionalen Definitionsbereichen. ϵ -Parameter	131

5.8	Numerische Dispersion selbstadjungierter Gleichungen und solcher vom Konvektions-Diffusionstyp	133
5.9	Automatische Zeitschrittwahl und Abschätzung der Stabilität und Dispersion nichtlinearer Gleichungen	136
5.10	Iteration nichtlinearer Gleichungen. Das Verfahren von Newton und Raphson	137
5.11	Tensorgleichungen. Gleichungen mit gemischten Ableitungen	139
5.12	Wandernde Fronten. Stream weighting 1	140
5.13	Freie Ränder. Stream weighting 2	144
5.14	Ein Kurzprogramm für selbstadjungierte Gleichungen auf beliebigen dreidimensionalen Bereichen mit allgemeinen Randbedingungen, harmonischer Mittelung und upstream weighting. Lösung explizit	147
5.15	Nichtkartesische Koordinaten mit unregelmäßigen Gitterabständen, unendliche Definitionsbereiche, logarithmische Unstetigkeiten und Anfangs-Sprungunstetigkeiten	151
5.16	Systeme parabolischer oder elliptischer Gleichungen	153
5.17	Eine Bemerkung zu Gleichungen der Form $f(v_{xx}, v_{yy}, v_{zz}, v_x, v_y, v_z, u_t) = 0$	154
5.18	Zusammengesetzte Medien. Phasenübergänge	154
5.19	Literatur	155
6	Große lineare Gleichungssysteme	
6.1	Einleitung	157
6.2	Vorteile und Nachteile expliziter Lösungsverfahren	157
6.3	Vorteile und Nachteile der Mehrgitterverfahren	158
6.4	Vorteile und Nachteile von ADIP und Douglas-Rachford iterativ (DRI)	158
6.5	Vorteile und Nachteile von SOR	159
6.6	Vorteile und Nachteile von Gauß-Seidel (GS) und dem Eliminationsverfahren von Gauß (GE)	160
6.7	Vorteile und Nachteile des Verfahrens von Jacobi (J)	161
6.8	Gradienten(artige) Methoden mit ihren Vor- und Nachteilen	162

6.9	Schlußworte zur Besprechung der Vor- und Nachteile der einzelnen Lösungsverfahren	162
6.10	Definitionen: positiv definite, unzerlegbare, diagonal dominierte Matrizen	163
6.11	Anwendung auf selbstadjungierte Gleichungen, Konvergenz iterativer Verfahren und Gauß-Elimination	165
6.12	Spärlich besetzte Bandmatrizen	167
6.13	Das speicherplatzsparende Programm gauss.f77	170
6.14	Die Gradientenmethode CG (conjugate gradient algorithm) für positiv definite Systeme	173
6.15	Die Gradientenmethode CGS (conjugate gradients squared) für Navier-Stokes Gleichungen und andere asymmetrische Probleme	174
6.16	Vorkonditionierung (preconditioning)	176
6.17	Platzsparendes Abspeichern der Koeffizientenmatrix	180
6.18	Einfachindizierung der Gitterpunkte bei Anwendung direkter Verfahren und Gradientenmethoden	181
6.19	Literatur	189

Finite Elemente

7	Einführung in die Methode der finiten Elemente	
7.1	Finite Elemente und ihre Knoten	195
7.2	Variationsaufgaben. Die Verfahren von Ritz und Galerkin	196
7.3	Vergleich der Differenzenmethode mit der finiten Elementmethode bei Lösung partieller Differentialgleichungen	198
7.4	Die Überführung von Variationsaufgaben in Differentialgleichungen. Natürliche Randbedingungen	199
7.5	Der Arbeitsablauf bei der Ritz-Variante	201
7.6	Die Berechnung von $\partial J / \partial U_r$	203
7.7	Eindimensionale Elemente	204
7.8	Die Lösung eindimensionaler Variationsaufgaben	205
7.9	Die Entfernung von Innenknoten	208

7.10 Die wichtigsten Eulerschen Gleichungen zu Variationsaufgaben	208
7.11 Variationsaufgaben zu gewöhnlichen Differential- gleichungen	211
7.12 Variationsaufgaben zu elliptischen Differential- gleichungen in der Ebene und im Raum	212
7.13 Literatur	212

8 Die Lösung von Variationsaufgaben I

8.1 Einleitung	214
8.2 Rechteckelemente	215
8.3 Dreidimensionale Blockelemente	218
8.4 Numerische Integration auf Intervall-, Rechteck- und Blockelementen	220
8.5 Dreieckelemente	221
8.6 Dreieckelemente mit drei oder sechs Knoten	224
8.7 Tetraederelemente	227
8.8 Die Behandlung nichtlinearer Randwertprobleme. Minimalflächen	231
8.9 Bemerkungen zur Programmierung und Gebietsaufteilung	232
8.10 Literatur	235

9 Die Lösung von Variationsaufgaben II

9.1 Allgemeine finite Elemente	236
9.2 Schiefwinklige 4-Knoten-Viereckelemente	239
9.3 Windschiefe dreidimensionale Blöcke	242
9.4 Die numerische Integration über schiefwinklige Vierecke und windschiefe dreidimensionale Blöcke	243
9.5 Dreieckelemente mit gekrümmten Rändern 1	245
9.6 Dreieckelemente mit gekrümmten Rändern 2	247
9.7 Dreieckelemente mit einem gekrümmten Rand	250
9.8 Integration über krummlinig berandete Dreiecke	252

9.9	Viereckelemente mit gekrümmten Rändern	254
9.10	Vergleich der praktischen Eigenschaften der Elemente	258
9.11	Die Biharmonische und andere Gleichungen vierter Ordnung	259
9.12	Intervallelemente mit stetiger erster Ableitung. Die Variationsaufgabe der gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung	261
9.13	Literatur	262

10 Gemischte Randbedingungen. Der Galerkin-Prozeß

10.1	Einleitung	263
10.2	Die Normalableitung	263
10.3	Natürliche Randbedingungen. Verschwinden der Normalableitung auf dem Rand	264
10.4	Gemischte Randbedingungen für Gleichungen mit zwei Ortsvariablen	265
10.5	Durchführung der Lösung für gemischte Randbedingungen	267
10.6	Gemischte Randbedingungen für Gleichungen mit drei Ortsvariablen	269
10.7	Die Berücksichtigung einfacher Nebenbedingungen	269
10.8	Der Galerkin-Prozeß	271
10.9	Lineare und nichtlineare parabolische, hyperbolische und gemischte Gleichungen und nichtlineare elliptische Probleme	272
10.10	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	274
10.11	Literatur	274

Fortran 77 Programme

implicit.f77	277
subprg1.f77	278
cranknic.f77	279
adipr.f77	280

subprg2.f77	281
poisson1.f77	282
pmat.f77	283
multigrid.f77	285
adjung.f77	287
welle.f77	291
utvx.f77	292
laxwf.f77	293
gebiet.f77	294
gauss.f77	296
Sachverzeichnis	297