

Inhaltsverzeichnis

I	Aufgaben	1
0	Mengen, Relationen und Abbildungen	3
0.1	Naive Mengenlehre	3
0.2	Geordnete Paare und Relationen	5
0.3	Abbildungen	5
0.4	Injective, surjektive und bijektive Abbildungen	6
1	Grundlagen der Analysis	9
1.1	Die natürlichen Zahlen	9
1.2	Abzählbarkeit	10
1.3	Körper	12
1.4	Angeordnete Körper	13
1.5	Das Archimedische Axiom	15
1.6	Folgen in einem angeordneten Körper	15
1.7	Vollständigkeit	19
2	Das System der reellen Zahlen	21
2.1	Axiomatische Einführung der reellen Zahlen	21
2.2	Dezimalbruchentwicklung	22
2.3	Die allgemeine Potenz einer reellen Zahl	22
2.4	Weitere Vollständigkeitsprinzipien	24
2.5	Häufungswerte	27
2.6	Das erweiterte reelle Zahlensystem	28

3	Unendliche Reihen	29
3.1	Unendliche Reihen	29
3.2	Vergleichskriterien	31
3.3	Potenzreihen	33
3.4	Partielle Summation	35
3.5	Der Umordnungssatz	36
3.6	Doppelfolgen	37
3.7	Doppelreihen	37
3.8	Produkte von Reihen	38
4	Stetige Funktionen einer Variablen	39
4.1	Reelle Funktionen	39
4.2	Polynome und rationale Funktionen	39
4.3	Der Limes einer Funktion	40
4.4	Stetige Funktionen	41
4.5	Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen	44
4.6	Monotone Funktionen	44
4.7	Gleichmäßige Konvergenz	45
4.8	Der Weierstraßsche Approximationssatz	46
4.9	Reihen von Funktionen	47
5	Differentialrechnung einer Variablen	49
5.1	Differenzierbare Funktionen einer Variablen	49
5.2	Ableitungsregeln	51
5.3	Kurvendiskussion und der Mittelwertsatz	52
5.4	Die de L'Hospitalschen Regeln	53
5.5	Differentiation von Folgen und Reihen	54
5.6	Höhere Ableitungen und die Taylorsche Formel	55
5.7	Lokale Extrema	59
5.8	Konvexität	60

6	Die elementaren transzendenten Funktionen	61
6.1	Die Exponentialfunktion	61
6.2	Die Hyperbelfunktionen	62
6.3	Der Logarithmus	62
6.4	Die allgemeine Potenz	63
6.5	Die Winkelfunktionen Cosinus und Sinus	63
6.6	Tangens und Cotangens	65
6.7	Die Arcusfunktionen	65
6.8	Polarkoordinaten	65
7	Integralrechnung	67
7.1	Stammfunktionen	67
7.2	Grundintegrale	67
7.3	Partielle Integration und Substitution	67
7.4	Integration rationaler Funktionen	69
7.5	Klassen elementar integrierbarer Funktionen	69
8	Das Riemannsche Integral	71
8.1	Das Riemann-Darboux'sche Integral	71
8.2	Die Riemannsche Definition	71
8.3	Klassen integrierbarer Funktionen	72
8.4	Eigenschaften integrierbarer Funktionen	73
8.5	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	76
8.6	Integralformeln	77
8.7	Uneigentliche Integrale	77
8.8	Das Integralkriterium und Anwendungen	79
8.9	Grenzwertsätze	80
A	Mengensysteme, Relationen und Partitionen	83
A.1	Mengensysteme	83
A.2	Indizierte Familien	83

A.3	Äquivalenzrelationen und Partitionen	84
A.4	Ordnungsrelationen	86
B	Konstruktion der reellen Zahlen	87
B.1	Cauchy-Folgen in einem angeordneten Körper	87
B.2	Definition der reellen Zahlen	87
B.3	Der angeordnete Körper der reellen Zahlen	87
B.4	Der Dedekindsche Satz	87
B.5	Das Hilbertsche Programm	88
C	Elementare komplexe Analysis	89
C.1	Komplexe Zahlen	89
C.2	Unendliche Reihen komplexer Zahlen	91
C.3	Komplexe Polynome und rationale Funktionen	92
C.4	Komplexe Funktionen	92
C.5	Komplex differenzierbare Funktionen	93
C.6	Die Exponentialfunktion	93
C.7	Die trigonometrischen Funktionen	94
C.8	Der Logarithmus und die allgemeine Potenz	94
C.9	Der Fundamentalsatz der Algebra	95
C.10	Integration komplexer Funktionen	95

II Lösungen und Hinweise 97

0	Mengen, Relationen und Abbildungen	99
0.1	Naive Mengenlehre	99
0.2	Geordnete Paare und Relationen	102
0.3	Abbildungen	102
0.4	Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen	104
1	Grundlagen der Analysis	107
1.1	Die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip	107

1.2	Abzählbarkeit	110
1.3	Körper	113
1.4	Angeordnete Körper	115
1.5	Das Archimedische Axiom	117
1.6	Folgen in einem angeordneten Körper	118
1.7	Vollständigkeit	122
2	Das System der reellen Zahlen	123
2.1	Axiomatische Einführung der reellen Zahlen	123
2.2	Dezimalbruchentwicklung	124
2.3	Die allgemeine Potenz einer reellen Zahl	124
2.4	Weitere Vollständigkeitsprinzipien	127
2.5	Häufungswerte	129
2.6	Das erweiterte reelle Zahlensystem	131
3	Unendliche Reihen	133
3.1	Unendliche Reihen	133
3.2	Vergleichskriterien	134
3.3	Potenzreihen	135
3.4	Partielle Summation	138
3.5	Der Umordnungssatz	138
3.6	Doppelfolgen	139
3.7	Doppelreihen	139
3.8	Produkte von Reihen	140
4	Stetige Funktionen einer Variablen	143
4.1	Reelle Funktionen	143
4.2	Polynome und rationale Funktionen	144
4.3	Der Limes einer Funktion	145
4.4	Stetige Funktionen	146
4.5	Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen	148

4.6	Monotone Funktionen	149
4.7	Gleichmäßige Konvergenz	150
4.8	Der Weierstraßsche Approximationssatz	151
4.9	Reihen von Funktionen.....	151
5	Differentialrechnung einer Variablen	153
5.1	Differenzierbare Funktionen einer Variablen.....	153
5.2	Ableitungsregeln	154
5.3	Kurvendiskussion und der Mittelwertsatz	154
5.4	Die de l'Hospitalschen Regeln	155
5.5	Differentiation von Folgen und Reihen	155
5.6	Höhere Ableitungen und die Taylorsche Formel	156
5.7	Lokale Extrema	161
5.8	Konvexität	161
6	Die elementaren transzendenten Funktionen	163
6.1	Die Exponentialfunktion	163
6.2	Die Hyperbelfunktionen	164
6.3	Der Logarithmus	164
6.4	Die allgemeine Potenz.....	166
6.5	Die Winkelfunktionen Cosinus und Sinus	167
6.6	Tangens und Cotangens	167
6.7	Die Arcusfunktionen	168
6.8	Polarkoordinaten	168
7	Integralrechnung	169
7.1	Stammfunktionen	169
7.2	Grundintegrale	169
7.3	Partielle Integration und Substitution.....	169
7.4	Integration rationaler Funktionen	170
7.5	Klassen elementar integrierbarer Funktionen	170

8	Das Riemannsche Integral	173
8.1	Das Riemann-Darboux'sche Integral	173
8.2	Die Riemannsche Definition	173
8.3	Klassen integrierbarer Funktionen	174
8.4	Eigenschaften integrierbarer Funktionen	174
8.5	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	176
8.6	Integralformeln	176
8.7	Uneigentliche Integrale	176
8.8	Das Integralkriterium und Anwendungen	177
8.9	Grenzwertsätze	177
A	Mengensysteme, Relationen und Partitionen	179
A.1	Mengensysteme	179
A.2	Indizierte Familien	179
A.3	Äquivalenzrelationen und Partitionen	179
A.4	Ordnungsrelationen	181
B	Konstruktion der reellen Zahlen	183
B.1	Cauchy-Folgen in einem angeordneten Körper	183
B.2	Definition der reellen Zahlen	183
B.3	Der angeordnete Körper der reellen Zahlen	183
B.4	Der Dedekindsche Satz	184
B.5	Das Hilbertsche Programm	184
C	Elementare komplexe Analysis	185
C.1	Komplexe Zahlen	185
C.2	Unendliche Reihen komplexer Zahlen	185
C.3	Komplexe Polynome und rationale Funktionen	186
C.4	Komplexe Funktionen	187
C.5	Komplex differenzierbare Funktionen	188
C.6	Die Exponentialfunktion	188

C.7	Die trigonometrischen Funktionen	189
C.8	Der Logarithmus und die allgemeine Potenz	189
C.9	Der Fundamentalsatz der Algebra.....	189
C.10	Integration komplexer Funktionen	190