

Inhaltsverzeichnis

1	Erforderliche mathematische Grundlagen	1
1.1	Matrizen	1
1.1.1	Rechenoperationen mit Matrizen	2
1.1.2	Addition und Subtraktion zweier Matrizen	2
1.1.3	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	2
1.1.4	Quadratische Matrix	3
1.1.5	Einheitsmatrix	3
1.1.6	Determinante	3
1.1.7	Unterdeterminante oder Minor	5
1.1.8	Adjunkte oder algebraisches Komplement	5
1.1.9	Inverse Matrix	6
1.1.10	Transponierte einer Matrix	7
1.1.11	Komplex konjugierte Matrix	7
1.1.12	Hermiteische konjugierte Matrix	8
1.1.13	Hermiteische Matrix – selbstadjungierte Matrix	9
1.1.14	Orthogonalmatrix	9
1.1.15	Unitäre Matrix	10
1.1.16	Normalmatrix – Normale Matrix	11
1.1.17	Norm einer Matrix	11
1.1.18	Konditionierte Matrixengleichung und Konditionszahl	12
1.1.19	Eigenwert, Eigenvektor	13
1.1.20	Quadratische Matrizen – eine Zusammenfassung	15
1.2	Integral-, Differenzialgleichungen	17
1.2.1	Definitionen	17
1.2.2	Differenzierung skalarer Funktionen	18
1.2.3	Gewöhnliche Differenzialgleichungen höherer Ordnung	18

1.2.4	Partielle Differenzialgleichungen	20
1.2.5	Partielle Integration	22
1.2.6	Klassifikation von Differenzialgleichungen	22
1.2.7	Anfangswertaufgabe	23
1.2.8	Randwertaufgabe	24
1.2.9	Lineare Operatoren	25
1.2.10	Inneres Produkt	27
1.2.11	Starke Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	30
1.2.12	Schwache Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	30
1.3	Vektor-Klassifikation	31
1.4	Differenziationsregeln für Vektoren	31
1.5	Vektoroperatoren	32
1.5.1	Nabla- und Laplace-Operator	32
1.5.2	Vektoroperator Gradient	33
1.5.3	Vektoroperator Divergenz	34
1.5.4	Vektoroperator Rotation	35
1.5.5	Gegenüberstellung der Vektoroperatoren	35
1.5.6	Rechenregeln für den Nabla-Operator	36
1.5.7	Gegenüberstellung Skalar- und Vektorprodukt	37
1.6	Maxwell'sche Gleichungen	38
1.6.1	Beziehung zwischen Kreis- und Flächenintegral	38
1.6.2	Beziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral	39
1.6.3	Maxwell'sche Gleichungen – Differenzialform	40
1.6.4	Maxwell'sche Gleichungen – Integralform	40
1.6.5	Richtungszuordnung beteiligter Vektorfelder	40
1.7	Dirac'sche Deltafunktion	41
2	Koordinatensysteme	43
2.1	Kartesisches Koordinatensystem	43
2.2	Zylinderkoordinatensystem	45
2.3	Kugelkoordinatensystem	47
3	LCR-Parallel- und Reihenschwingkreis	51
3.1	Schwingkreise, Impedanzen und Resonanzen	51
3.2	Eigenfrequenz – Fehlerrechnung	55

3.3	Spannungsverläufe LCR-Reihenschwingkreis bei Frequenzvariation . . .	56
3.3.1	Spannungsverlauf über der Induktivität	57
3.3.2	Spannungsverlauf über Induktivität und Widerstand	59
3.3.3	Spannungsverlauf über dem Widerstand	61
3.3.4	Spannungsverlauf über der Kapazität	62
3.4	Gedämpfter, erzwungener LCR-Reihenschwingkreis	64
3.5	Gedämpfter, freier LCR-Reihenschwingkreis	67
3.6	Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis	69
3.7	Gedämpfter, erzwungener LCR-Parallelschwingkreis	70
3.8	Gedämpfter, freier LCR-Parallelschwingkreis	76
3.9	Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis	79
4	Stromverdrängung im Leiter	81
4.1	Stromverdrängung im Leiter – Modellbildung	82
4.2	Stromverdrängung im Leiter – Berechnungsergebnis	86
4.3	Stromverdrängung im Leiter – Simulationsergebnis	87
4.4	Stromverdrängung im Leiter – Zusammenfassung	89
5	Besselgleichung und Besselfunktion	91
5.1	Zur Person Wilhelm Friedrich Bessel	92
5.2	Besselgleichung des LCR-Parallelschwingkreises	93
5.3	Besselgleichung der Felddiffusionsgleichung	94
5.4	Besselfunktion zur Berechnung der Feldverteilung in einem Kondensator	97
5.4.1	Modellanordnung	97
5.4.2	Herleitung der Besselfunktion	98
5.5	Besselfunktion zur Berechnung der Flussdichteverteilung in einer Spule	101
5.5.1	Modellanordnung	101
5.5.2	Herleitung der Besselfunktion	101
5.6	Besselfunktion aus allgemeiner Form der Besselgleichung	104
6	Lösung von Differenzialgleichungen mittels Green'scher Funktionen	109
6.1	Zur Person George Green	109
6.2	Green'sche Integralsätze	112
6.3	PDE – Auf-, Integrationspunktanordnungen	114
6.4	PDE – Vorbereitung zur Lösung nach Green – Differenzialform	116
6.5	PDE – Vorbereitung zur Lösung nach Green – Integralform	118

6.5.1	Umstellen der PDE nach der zu lösenden Variable	118
6.5.2	Homogene Randbedingungen	120
6.5.3	Inhomogene Randbedingungen	121
6.5.4	Dirichlet-Randbedingungen	121
6.5.5	Neumann-Randbedingungen	121
6.6	PDE – Lösung der Poisson’schen DGL	122
6.6.1	Aufgabenbeschreibung	122
6.6.2	Lösungsweg	123
6.7	PDE – Lösung der Laplace’schen DGL	125
6.7.1	Aufgabenbeschreibung	125
6.7.2	Lösungsweg	126
6.8	ODE – Vorbereitung zur Lösung mit der Green’schen Funktion	128
6.8.1	Homogene Randbedingungen	130
6.8.2	Inhomogene Randbedingungen	130
6.8.3	Kontinuitäts- und Diskontinuitätsbedingungen	131
6.9	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)	133
6.9.1	Aufgabenbeschreibung	133
6.9.2	Lösungsweg I	134
6.9.3	Lösungsweg II	137
6.10	ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = \operatorname{cosec} x$	140
6.10.1	Aufgabenbeschreibung	140
6.10.2	Lösungsweg	140
6.11	ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = f(x)$	142
6.11.1	Aufgabenbeschreibung	142
6.11.2	Lösungsweg	142
6.12	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)	144
6.12.1	Aufgabenbeschreibung	144
6.12.2	Lösungsweg	145
6.13	ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = x$	148
6.13.1	Aufgabenbeschreibung	148
6.13.2	Lösungsweg	148

7 Differenzialgleichungen und Finite Elemente 153

7.1	Beispiele aus der Physik für Differenzialgleichungen 1’ter Ordnung . . .	153
7.2	Beispiele aus der Physik für Differenzialgleichungen 2’ter Ordnung . . .	154

7.3	Finite Elemente	158
8	Von der Momentenmethode zur Galerkin-Methode	161
8.1	Grundprinzip der Momentenmethode (MOM)	161
8.2	Anmerkungen zur Momentenmethode	163
8.2.1	Matrix (l_{jk})	163
8.2.2	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktionen ϕ_n und w_k	164
8.3	Zur Person Boris Galerkin	164
8.4	Galerkins Idee	165
9	Traditionelle Galerkin-Methode	167
10	Galerkin-Methode – Lösung von $du/dx = u$	169
10.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	169
10.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion .	170
10.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	171
10.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	171
11	Galerkin-Methode – Lösung von $-d^2u/dx^2 = 4x^2 + 1$	175
11.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	175
11.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion .	176
11.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	176
11.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	178
12	Galerkin-Methode – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)	181
12.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	182
12.2	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	182
12.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	183
12.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	183
13	Galerkin-Methode – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)	185
13.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	185
13.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion .	186
13.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	187
13.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	188

14 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz	191
14.1 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz Innenbereich des Leiters . . .	193
14.1.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	193
14.1.2 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung .	194
14.1.3 Lösung des linearen Gleichungssystems	195
14.2 Galerkin-Methode – Durchflutungsgesetz Außenbereich des Leiters . . .	196
14.2.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	196
14.2.2 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung .	197
14.2.3 Lösung des linearen Gleichungssystems	198
14.3 Gegenüberstellung von FEM- mit Galerkin-Ergebnis	199
15 Galerkin-FEM	201
15.1 Galerkin-FEM – Was wird gelöst?	201
15.2 Galerkin-FEM – Vorgehen zur Lösung	202
16 Galerkin-FEM – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)	205
16.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	206
16.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	207
16.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	207
16.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	209
16.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	210
16.6 Lösung des linearen Gleichungssystems	214
17 Galerkin-FEM – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)	217
17.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	218
17.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	219
17.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	219
17.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	219
17.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	219
17.6 Lösung des linearen Gleichungssystems	220
18 Galerkin-FEM – Elektrostatische Feldberechnung	223
18.1 Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	223
18.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	224
18.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	224
18.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	224

18.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	226
18.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	228
19	Galerkin-FEM – Ortsabhängige Temperaturberechnung	231
19.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	231
19.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	233
19.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	233
19.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	233
19.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	234
19.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	235
19.7	Diffusionsvorgang vollendet	238
20	Galerkin-FEM – Ortsabhängige Magnetfeldberechnung	241
20.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	241
20.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	243
20.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	243
20.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	243
20.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	244
20.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	245
21	Einführung in die Finite-Differenzen-Methode	251
21.1	Numerische Notation der linearen Felddiffusionsgleichung	251
21.2	Zu den Personen Crank und Nicolson	252
21.3	Lösung mit impliziter Methode nach Crank-Nicolson	252
21.3.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrizengleichung .	253
21.3.2	Lösung der Matrizengleichung	254
21.3.3	Anwendungsbeispiel	257
21.4	Lösung mit expliziter Methode	260
21.4.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrizengleichung .	260
21.4.2	Lösung der Matrizengleichung	261
21.4.3	Anwendungsbeispiel	262
22	Anwendungen der FEM zur Produktentwicklung	269
22.1	Analyse eines Proportionalmagnets	269
22.1.1	Preprocessing	270
22.1.2	Processing	271

22.1.3	Postprocessing	272
22.2	Synthese eines planaren Asynchron-Scheibenläufermotors	273
22.2.1	Preprocessing	273
22.2.2	Processing	273
22.2.3	Postprocessing	274
22.2.4	Musterbau des planaren Asynchronmotors	274
23	Virtuelle Produktentwicklung	277
23.1	Kopplung zwischen FEM- und Optimierungstool	277
23.2	Mehrzieloptimierung – Pareto-Optimierung	278
23.3	Optimierungsbeispiel Elektromagnet	279
23.3.1	Monte Carlo-Methode	280
23.3.2	Partikelschwarm-Methode	282
23.3.3	Evolutionäre Methode	282
23.3.4	Diskussion der Ergebnisse	283
24	Eigenwertprobleme	285
24.1	Eigenwertproblem – Einführung	285
24.2	Eigenwertproblem – Momentenmethode	286
24.3	Eigenwertproblem – kanonische Form	287
25	Eigenwertproblem-MOM – Lösung von $-d^2u/dx^2 = \lambda u$	289
25.1	Aufgabenbeschreibung	289
25.2	Lösungsweg und Lösung	290
25.3	Lösung für 1'ter Ordnung	290
25.4	Lösung für 2'ter Ordnung	294
26	Gemeinsamkeiten von Methoden zur Lösung von DGLs	297
26.1	Momentenmethode (MOM)	297
26.2	Integraltransformation	299
26.3	Green'sche Methode	300
27	Wissenswertes zur Modellbildung	303
27.1	Kategorien der Modellbildung	303
27.2	Analytik contra Numerik	304
28	Nützliche Normen	307

Literaturverzeichnis	311
A Anhang	317
A.1 MATLAB-Code – Wärmediffusionsskript	317
A.2 MATLAB-Code – Magnetfelddiffusionsskript	321
A.3 Toolvergleich – MATLAB vs. COMSOL	327
B Campus Künzelsau – Inside	329
Index	331