

---

# Höhere Mathematik

---

für Ingenieure, Physiker und Mathematiker

---

von

Dr. Dr. h.c. Norbert Herrmann  
Leibniz Universität Hannover

---

2., überarbeitete Auflage

---

Oldenbourg Verlag München Wien

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Numerik linearer Gleichungssysteme</b>	<b>9</b>
1.1 Einleitung . . . . .	9
1.2 Zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	10
1.3 Spezielle Matrizen . . . . .	11
1.3.1 Symmetrische und Hermitesche Matrizen . . . . .	11
1.3.2 Positiv definite Matrizen . . . . .	12
1.3.3 Orthogonale Matrizen . . . . .	16
1.3.4 Permutationsmatrizen . . . . .	17
1.3.5 Frobeniusmatrizen . . . . .	19
1.3.6 Diagonaldominante Matrizen . . . . .	21
1.3.7 Zerfallende Matrizen . . . . .	23
1.4 Vektor- und Matrix-Norm . . . . .	25
1.4.1 Vektornorm . . . . .	25
1.4.2 Matrixnorm . . . . .	30
1.5 Fehleranalyse . . . . .	33
1.5.1 Kondition . . . . .	33
1.5.2 Vorwärtsanalyse und Fehlerabschätzungen . . . . .	36
1.5.3 Rückwärtsanalyse: Satz von Prager und Oettli . . . . .	38
1.6 L–R–Zerlegung . . . . .	44
1.6.1 Die Grundaufgabe . . . . .	44
1.6.2 Pivotisierung . . . . .	48
1.6.3 L–R–Zerlegung und lineare Gleichungssysteme . . . . .	53
1.6.4 L–R–Zerlegung und inverse Matrix . . . . .	55
1.7 Q–R–Zerlegung . . . . .	57
1.7.1 Der Algorithmus . . . . .	59
1.7.2 Q–R–Zerlegung und lineare Gleichungssysteme . . . . .	62
1.8 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	63
1.8.1 Die kleinste Fehlerquadratsumme . . . . .	64
1.8.2 Q–R–Zerlegung und überbestimmte lineare Gleichungssysteme	69
1.9 Gleichungssysteme mit symmetrischer Matrix . . . . .	73
1.9.1 Cholesky–Verfahren . . . . .	73

1.9.2	Cholesky–Zerlegung und lineare Gleichungssysteme . . . . .	77
1.9.3	Einige Zusatzbemerkungen . . . . .	78
1.9.4	Verfahren der konjugierten Gradienten . . . . .	79
1.10	Iterative Verfahren . . . . .	83
1.10.1	Gesamt– und Einzelschrittverfahren . . . . .	83
1.10.2	SOR–Verfahren . . . . .	90
<b>2</b>	<b>Numerik für Eigenwertaufgaben</b>	<b>93</b>
2.1	Einleitung und Motivation . . . . .	93
2.2	Grundlegende Tatsachen . . . . .	94
2.2.1	Die allgemeine Eigenwert–Eigenvektoraufgabe . . . . .	94
2.2.2	Ähnlichkeit von Matrizen . . . . .	97
2.3	Abschätzung nach Gerschgorin . . . . .	99
2.4	Das vollständige Eigenwertproblem . . . . .	103
2.4.1	Zurückführung einer Matrix auf Hessenberggestalt . . . . .	104
2.4.2	Verfahren von Wilkinson . . . . .	104
2.4.3	Verfahren von Householder . . . . .	107
2.4.4	Das Verfahren von Hyman . . . . .	115
2.4.5	Shift . . . . .	117
2.4.6	Q–R–Verfahren . . . . .	119
2.4.7	Verfahren von Jacobi . . . . .	128
2.5	Das partielle Eigenwertproblem . . . . .	133
2.5.1	Von Mises–Verfahren . . . . .	134
2.5.2	Rayleigh–Quotient für symmetrische Matrizen . . . . .	137
2.5.3	Inverse Iteration nach Wielandt . . . . .	140
<b>3</b>	<b>Lineare Optimierung</b>	<b>145</b>
3.1	Einführung . . . . .	145
3.2	Die Standardform . . . . .	146
3.3	Graphische Lösung im 2D–Fall . . . . .	148
3.4	Lösbarkeit des linearen Optimierungsproblems . . . . .	152
3.5	Der Simplex–Algorithmus . . . . .	157
3.5.1	Der Algorithmus am Beispiel der Transportaufgabe . . . . .	159
3.5.2	Sonderfälle . . . . .	162
<b>4</b>	<b>Interpolation</b>	<b>169</b>
4.1	Polynominterpolation . . . . .	169
4.1.1	Aufgabenstellung . . . . .	169
4.1.2	Lagrange–Interpolation . . . . .	172
4.1.3	Newton–Interpolation . . . . .	175
4.1.4	Auswertung von Interpolationspolynomen . . . . .	178
4.1.5	Der punktweise Fehler . . . . .	180
4.1.6	Hermite–Interpolation . . . . .	182
4.2	Interpolation durch Spline–Funktionen . . . . .	185

4.2.1	Ärger mit der Polynom–Interpolation . . . . .	185
4.2.2	Lineare Spline–Funktionen . . . . .	187
4.2.3	Hermite–Spline–Funktionen . . . . .	193
4.2.4	Kubische Spline–Funktionen . . . . .	201
<b>5</b>	<b>Numerische Quadratur</b>	<b>213</b>
5.1	Allgemeine Vorbetrachtung . . . . .	213
5.1.1	Begriff der Quadraturformel . . . . .	213
5.1.2	Der Exaktheitsgrad von Quadraturformeln . . . . .	214
5.1.3	Einige klassische Formeln . . . . .	215
5.2	Interpolatorische Quadraturformeln . . . . .	216
5.2.1	Newton–Cotes–Formeln . . . . .	217
5.2.2	Formeln vom MacLaurin–Typ . . . . .	219
5.2.3	Mehrfachanwendungen . . . . .	219
5.3	Quadratur nach Romberg . . . . .	224
5.4	Gauß–Quadratur . . . . .	226
5.4.1	Normierung des Integrationsintervalls . . . . .	226
5.4.2	Konstruktion einer Gaußformel . . . . .	227
5.4.3	Legendre–Polynome . . . . .	228
5.4.4	Bestimmung der Stützstellen . . . . .	229
5.4.5	Bestimmung der Gewichte . . . . .	229
5.4.6	Exaktheitsgrad und Restglied Gaußscher Quadraturformeln . . . . .	230
5.5	Vergleichendes Beispiel . . . . .	230
5.6	Stützstellen und Gewichte nach Gauß . . . . .	236
<b>6</b>	<b>Nichtlineare Gleichungen</b>	<b>241</b>
6.1	Motivation . . . . .	241
6.2	Fixpunktverfahren . . . . .	242
6.3	Newton–Verfahren . . . . .	248
6.4	Sekanten–Verfahren . . . . .	252
6.5	Verfahren von Bäirstow . . . . .	253
6.6	Systeme von nichtlinearen Gleichungen . . . . .	256
6.6.1	Motivation . . . . .	256
6.6.2	Fixpunktverfahren . . . . .	257
6.6.3	Newton–Verfahren für Systeme . . . . .	260
6.6.4	Vereinfachtes Newton–Verfahren für Systeme . . . . .	261
6.6.5	Modifiziertes Newton–Verfahren für Systeme . . . . .	262
<b>7</b>	<b>Laplace–Transformation</b>	<b>267</b>
7.1	Einführung . . . . .	268
7.2	Existenz der Laplace–Transformierten . . . . .	269
7.3	Rechenregeln . . . . .	271
7.4	Die inverse Laplace–Transformation . . . . .	278
7.4.1	Partialbruchzerlegung . . . . .	279

7.4.2	Faltung . . . . .	280
7.5	Zusammenfassung . . . . .	282
7.6	Anwendung auf Differentialgleichungen . . . . .	283
7.7	Einige Laplace–Transformierte . . . . .	285
<b>8</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>289</b>
8.1	Erklärung der Fourierreihe . . . . .	290
8.2	Berechnung der Fourierkoeffizienten . . . . .	291
8.3	Reelle F–Reihe $\iff$ komplexe F–Reihe . . . . .	293
8.4	Einige Sätze über Fourier–Reihen . . . . .	295
8.5	Sprungstellenverfahren . . . . .	296
8.6	Zum Gibbsschen Phänomen . . . . .	298
8.7	Schnelle Fourieranalyse (FFT) . . . . .	300
<b>9</b>	<b>Distributionen</b>	<b>307</b>
9.1	Einleitung und Motivation . . . . .	307
9.2	Testfunktionen . . . . .	308
9.3	Reguläre Distributionen . . . . .	310
9.4	Singuläre Distributionen . . . . .	312
9.5	Limes bei Distributionen . . . . .	314
9.6	Rechenregeln . . . . .	315
9.7	Ableitung von Distributionen . . . . .	318
9.8	Faltung von Testfunktionen . . . . .	321
9.9	Faltung bei Distributionen . . . . .	322
9.10	Anwendung auf Differentialgleichungen . . . . .	324
<b>10</b>	<b>Numerik von Anfangswertaufgaben</b>	<b>329</b>
10.1	Einführung . . . . .	329
10.2	Warum ein Auto bei Glätte schleudert . . . . .	329
10.2.1	Explizite Differentialgleichungen n-ter Ordnung . . . . .	335
10.2.2	DGl n-ter Ordnung $\rightarrow$ DGl-System . . . . .	336
10.3	Aufgabenstellung . . . . .	338
10.4	Zur Existenz und Einzigkeit einer Lösung . . . . .	339
10.5	Numerische Einschritt–Verfahren . . . . .	347
10.5.1	Euler–Polygonzug–Verfahren . . . . .	348
10.5.2	Verbessertes Euler–Verfahren . . . . .	350
10.5.3	Implizites Euler–Verfahren . . . . .	351
10.5.4	Trapez–Verfahren . . . . .	353
10.5.5	Runge–Kutta–Verfahren . . . . .	354
10.5.6	Die allgemeinen Runge–Kutta–Verfahren . . . . .	355
10.6	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei Einschrittverfahren . . . . .	357
10.6.1	Konsistenz . . . . .	357
10.6.2	Stabilität . . . . .	365
10.6.3	Konvergenz . . . . .	378

10.7	Lineare Mehrschritt–Verfahren . . . . .	382
10.7.1	Herleitung von Mehrschritt–Verfahren . . . . .	382
10.8	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei Mehrschrittverfahren . . . . .	384
10.8.1	Konsistenz . . . . .	384
10.8.2	Stabilität . . . . .	389
10.8.3	Konvergenz . . . . .	391
10.9	Prädiktor–Korrektor–Verfahren . . . . .	391
<b>11</b>	<b>Numerik von Randwertaufgaben</b>	<b>395</b>
11.1	Aufgabenstellung . . . . .	395
11.1.1	Homogenisierung der Randbedingungen . . . . .	396
11.2	Zur Existenz und Einzigkeit einer Lösung . . . . .	398
11.3	Kollokationsverfahren . . . . .	400
11.4	Finite Differenzenmethode FDM . . . . .	402
11.5	Verfahren von Galerkin . . . . .	409
11.5.1	Die schwache Form . . . . .	412
11.5.2	Sobolev–Räume . . . . .	413
11.5.3	1. Konstruktion der Sobolev–Räume . . . . .	416
11.5.4	2. Konstruktion der Sobolev–Räume . . . . .	416
11.5.5	Durchführung des Verfahrens von Galerkin . . . . .	420
11.6	Methode der finiten Elemente . . . . .	425
11.6.1	Kurzer geschichtlicher Überblick . . . . .	425
11.6.2	Algorithmus zur FEM . . . . .	426
11.6.3	Zur Fehlerabschätzung . . . . .	431
11.7	Exkurs zur Variationsrechnung . . . . .	433
11.7.1	Einleitende Beispiele . . . . .	433
11.7.2	Grundlagen . . . . .	435
11.7.3	Eine einfache Standardaufgabe . . . . .	437
11.7.4	Verallgemeinerung . . . . .	441
11.7.5	Belastete Variationsprobleme . . . . .	443
11.8	Verfahren von Ritz . . . . .	444
11.8.1	Vergleich von Galerkin– und Ritz–Verfahren . . . . .	446
<b>12</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>451</b>
12.1	Einige Grundtatsachen . . . . .	452
12.1.1	Klassifizierung . . . . .	454
12.1.2	Anfangs– und Randbedingungen . . . . .	457
12.1.3	Korrekt gestellte Probleme . . . . .	460
12.2	Die Poissons-Gleichung und die Potentialgleichung . . . . .	462
12.2.1	Dirichletsche Randwertaufgabe . . . . .	462
12.2.2	Neumannsche Randwertaufgabe . . . . .	472
12.2.3	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren . . . . .	475
12.3	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	482
12.3.1	Einzigkeit und Stabilität . . . . .	482

---

12.3.2	Zur Existenz	485
12.3.3	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren	490
12.4	Die Wellengleichung	497
12.4.1	Die allgemeine Wellengleichung	497
12.4.2	Das Cauchy-Problem	500
12.4.3	Das allgemeine Anfangs-Randwert-Problem	501
12.4.4	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren	505
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>510</b>
<b>Index</b>		<b>513</b>