
Höhere Mathematik

für Ingenieure, Physiker und Mathematiker

von

Dr. Dr. h.c. Norbert Herrmann
Leibniz Universität Hannover

2., überarbeitete Auflage

Oldenbourg Verlag München Wien

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Numerik linearer Gleichungssysteme	9
1.1 Einleitung	9
1.2 Zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	10
1.3 Spezielle Matrizen	11
1.3.1 Symmetrische und Hermitesche Matrizen	11
1.3.2 Positiv definite Matrizen	12
1.3.3 Orthogonale Matrizen	16
1.3.4 Permutationsmatrizen	17
1.3.5 Frobeniusmatrizen	19
1.3.6 Diagonaldominante Matrizen	21
1.3.7 Zerfallende Matrizen	23
1.4 Vektor- und Matrix-Norm	25
1.4.1 Vektornorm	25
1.4.2 Matrixnorm	30
1.5 Fehleranalyse	33
1.5.1 Kondition	33
1.5.2 Vorwärtsanalyse und Fehlerabschätzungen	36
1.5.3 Rückwärtsanalyse: Satz von Prager und Oettli	38
1.6 L-R-Zerlegung	44
1.6.1 Die Grundaufgabe	44
1.6.2 Pivotisierung	48
1.6.3 L-R-Zerlegung und lineare Gleichungssysteme	53
1.6.4 L-R-Zerlegung und inverse Matrix	55
1.7 Q-R-Zerlegung	57
1.7.1 Der Algorithmus	59
1.7.2 Q-R-Zerlegung und lineare Gleichungssysteme	62
1.8 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	63
1.8.1 Die kleinste Fehlerquadratsumme	64
1.8.2 Q-R-Zerlegung und überbestimmte lineare Gleichungssysteme	69
1.9 Gleichungssysteme mit symmetrischer Matrix	73
1.9.1 Cholesky-Verfahren	73

1.9.2	Cholesky-Zerlegung und lineare Gleichungssysteme	77
1.9.3	Einige Zusatzbemerkungen	78
1.9.4	Verfahren der konjugierten Gradienten	79
1.10	Iterative Verfahren	83
1.10.1	Gesamt- und Einzelschrittverfahren	83
1.10.2	SOR-Verfahren	90
2	Numerik für Eigenwertaufgaben	93
2.1	Einleitung und Motivation	93
2.2	Grundlegende Tatsachen	94
2.2.1	Die allgemeine Eigenwert-Eigenvektoraufgabe	94
2.2.2	Ähnlichkeit von Matrizen	97
2.3	Abschätzung nach Gerschgorin	99
2.4	Das vollständige Eigenwertproblem	103
2.4.1	Zurückführung einer Matrix auf Hessenberggestalt	104
2.4.2	Verfahren von Wilkinson	104
2.4.3	Verfahren von Householder	107
2.4.4	Das Verfahren von Hyman	115
2.4.5	Shift	117
2.4.6	Q-R-Verfahren	119
2.4.7	Verfahren von Jacobi	128
2.5	Das partielle Eigenwertproblem	133
2.5.1	Von Mises-Verfahren	134
2.5.2	Rayleigh-Quotient für symmetrische Matrizen	137
2.5.3	Inverse Iteration nach Wielandt	140
3	Lineare Optimierung	145
3.1	Einführung	145
3.2	Die Standardform	146
3.3	Graphische Lösung im 2D-Fall	148
3.4	Lösbarkeit des linearen Optimierungsproblems	152
3.5	Der Simplex-Algorithmus	157
3.5.1	Der Algorithmus am Beispiel der Transportaufgabe	159
3.5.2	Sonderfälle	162
4	Interpolation	169
4.1	Polynominterpolation	169
4.1.1	Aufgabenstellung	169
4.1.2	Lagrange-Interpolation	172
4.1.3	Newton-Interpolation	175
4.1.4	Auswertung von Interpolationspolynomen	178
4.1.5	Der punktweise Fehler	180
4.1.6	Hermite-Interpolation	182
4.2	Interpolation durch Spline-Funktionen	185

4.2.1	Ärger mit der Polynom-Interpolation	185
4.2.2	Lineare Spline-Funktionen	187
4.2.3	Hermite-Spline-Funktionen	193
4.2.4	Kubische Spline-Funktionen	201
5	Numerische Quadratur	213
5.1	Allgemeine Vorbetrachtung	213
5.1.1	Begriff der Quadraturformel	213
5.1.2	Der Exaktheitsgrad von Quadraturformeln	214
5.1.3	Einige klassische Formeln	215
5.2	Interpolatorische Quadraturformeln	216
5.2.1	Newton-Cotes-Formeln	217
5.2.2	Formeln vom MacLaurin-Typ	219
5.2.3	Mehrfachanwendungen	219
5.3	Quadratur nach Romberg	224
5.4	Gauß-Quadratur	226
5.4.1	Normierung des Integrationsintervalls	226
5.4.2	Konstruktion einer Gaußformel	227
5.4.3	Legendre-Polynome	228
5.4.4	Bestimmung der Stützstellen	229
5.4.5	Bestimmung der Gewichte	229
5.4.6	Exaktheitsgrad und Restglied Gaußscher Quadraturformeln	230
5.5	Vergleichendes Beispiel	230
5.6	Stützstellen und Gewichte nach Gauß	236
6	Nichtlineare Gleichungen	241
6.1	Motivation	241
6.2	Fixpunktverfahren	242
6.3	Newton-Verfahren	248
6.4	Sekanten-Verfahren	252
6.5	Verfahren von Bairstow	253
6.6	Systeme von nichtlinearen Gleichungen	256
6.6.1	Motivation	256
6.6.2	Fixpunktverfahren	257
6.6.3	Newton-Verfahren für Systeme	260
6.6.4	Vereinfachtes Newton-Verfahren für Systeme	261
6.6.5	Modifiziertes Newton-Verfahren für Systeme	262
7	Laplace-Transformation	267
7.1	Einführung	268
7.2	Existenz der Laplace-Transformierten	269
7.3	Rechenregeln	271
7.4	Die inverse Laplace-Transformation	278
7.4.1	Partialbruchzerlegung	279

7.4.2	Faltung	280
7.5	Zusammenfassung	282
7.6	Anwendung auf Differentialgleichungen	283
7.7	Einige Laplace-Transformierte	285
8	Fourierreihen	289
8.1	Erklärung der Fourierreihe	290
8.2	Berechnung der Fourierkoeffizienten	291
8.3	Reelle F-Reihe \iff komplexe F-Reihe	293
8.4	Einige Sätze über Fourier-Reihen	295
8.5	Sprungstellenverfahren	296
8.6	Zum Gibbsschen Phänomen	298
8.7	Schnelle Fourieranalyse (FFT)	300
9	Distributionen	307
9.1	Einleitung und Motivation	307
9.2	Testfunktionen	308
9.3	Reguläre Distributionen	310
9.4	Singuläre Distributionen	312
9.5	Limes bei Distributionen	314
9.6	Rechenregeln	315
9.7	Ableitung von Distributionen	318
9.8	Faltung von Testfunktionen	321
9.9	Faltung bei Distributionen	322
9.10	Anwendung auf Differentialgleichungen	324
10	Numerik von Anfangswertaufgaben	329
10.1	Einführung	329
10.2	Warum ein Auto bei Glätte schleudert	329
10.2.1	Explizite Differentialgleichungen n-ter Ordnung	335
10.2.2	DGI n-ter Ordnung \rightarrow DGI-System	336
10.3	Aufgabenstellung	338
10.4	Zur Existenz und Einzigkeit einer Lösung	339
10.5	Numerische Einschritt-Verfahren	347
10.5.1	Euler-Polygonzug-Verfahren	348
10.5.2	Verbessertes Euler-Verfahren	350
10.5.3	Implizites Euler-Verfahren	351
10.5.4	Trapez-Verfahren	353
10.5.5	Runge-Kutta-Verfahren	354
10.5.6	Die allgemeinen Runge-Kutta-Verfahren	355
10.6	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei Einschrittverfahren	357
10.6.1	Konsistenz	357
10.6.2	Stabilität	365
10.6.3	Konvergenz	378

10.7	Lineare Mehrschritt-Verfahren	382
10.7.1	Herleitung von Mehrschritt-Verfahren	382
10.8	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei Mehrschrittverfahren	384
10.8.1	Konsistenz	384
10.8.2	Stabilität	389
10.8.3	Konvergenz	391
10.9	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	391
11	Numerik von Randwertaufgaben	395
11.1	Aufgabenstellung	395
11.1.1	Homogenisierung der Randbedingungen	396
11.2	Zur Existenz und Einzigkeit einer Lösung	398
11.3	Kollokationsverfahren	400
11.4	Finite Differenzenmethode FDM	402
11.5	Verfahren von Galerkin	409
11.5.1	Die schwache Form	412
11.5.2	Sobolev-Räume	413
11.5.3	1. Konstruktion der Sobolev-Räume	416
11.5.4	2. Konstruktion der Sobolev-Räume	416
11.5.5	Durchführung des Verfahrens von Galerkin	420
11.6	Methode der finiten Elemente	425
11.6.1	Kurzer geschichtlicher Überblick	425
11.6.2	Algorithmus zur FEM	426
11.6.3	Zur Fehlerabschätzung	431
11.7	Exkurs zur Variationsrechnung	433
11.7.1	Einleitende Beispiele	433
11.7.2	Grundlagen	435
11.7.3	Eine einfache Standardaufgabe	437
11.7.4	Verallgemeinerung	441
11.7.5	Belastete Variationsprobleme	443
11.8	Verfahren von Ritz	444
11.8.1	Vergleich von Galerkin- und Ritz-Verfahren	446
12	Partielle Differentialgleichungen	451
12.1	Einige Grundtatsachen	452
12.1.1	Klassifizierung	454
12.1.2	Anfangs- und Randbedingungen	457
12.1.3	Korrekt gestellte Probleme	460
12.2	Die Poissongleichung und die Potentialgleichung	462
12.2.1	Dirichletsche Randwertaufgabe	462
12.2.2	Neuman'sche Randwertaufgabe	472
12.2.3	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren	475
12.3	Die Wärmeleitungsgleichung	482
12.3.1	Einzigkeit und Stabilität	482

12.3.2	Zur Existenz	485
12.3.3	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren	490
12.4	Die Wellengleichung	497
12.4.1	Die allgemeine Wellengleichung	497
12.4.2	Das Cauchy–Problem	500
12.4.3	Das allgemeine Anfangs–Randwert–Problem	501
12.4.4	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren	505
Literaturverzeichnis		510
Index		513