

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur zweiten Auflage	vii
Vorwort zur ersten Auflage	ix
Danksagungen	xi
Anleitung für den Leser	xvii
Erklärung der Symbole	xix
Einleitung	1
1 Wie viele Primzahlen gibt es?	3
I Beweis von Euklid	3
II Ein Beweis von Goldbach!	6
III Beweis von Euler	8
IV Beweis von Thue	10
V Drei vergessene Beweise	10
A Beweis von Perott	11
B Beweis von Auric	11
C Beweis von Métrod	12
VI Beweis von Washington	12
VII Beweis von Furstenberg	13
2 Wie kann man Primzahlen erkennen?	15
I Das Sieb des Eratosthenes	16
II Einige grundlegende Sätze über Kongruenzen	17

A	Der kleine Satz von Fermat und Primitivwurzeln modulo einer Primzahl	17
B	Der Satz von Wilson	20
C	Die Eigenschaften von Giuga und von Wolstenholme	22
D	Primzahlpotenzen als Teiler der Fakultät einer Zahl	24
E	Der chinesische Restsatz	27
F	Die Eulersche φ -Funktion	28
G	Folgen von Binomialzahlen	34
H	Quadratische Reste	37
III	Klassische Primzahltests auf der Grundlage von Kongruenzen	39
IV	Lucas-Folgen	44
V	Primzahltests auf der Grundlage von Lucas-Folgen	59
VI	Fermat-Zahlen	71
VII	Mersenne-Zahlen	76
VIII	Pseudoprimzahlen	90
	A Pseudoprimzahlen zur Basis 2 (psp)	90
	B Pseudoprimzahlen zur Basis a (psp(a))	94
	C Euler-Pseudoprimzahlen zur Basis a (epsp(a)) . .	97
	D Starke Pseudoprimzahlen zur Basis a (spsp(a)) .	98
IX	Carmichael-Zahlen	102
X	Lucas-Pseudoprimzahlen	105
	A Fibonacci-Pseudoprimzahlen	106
	B Lucas-Pseudoprimzahlen ($\text{lpsp}(P, Q)$)	108
	C Euler-Lucas-Pseudoprimzahlen ($\text{elpsp}(P, Q)$) und starke Lucas-Pseudoprimzahlen ($\text{slpsp}(P, Q)$) .	109
	D Carmichael-Lucas-Zahlen	110
XI	Primzahltests und Faktorisierung	111
	A Aufwand für einen Primzahltest	112
	B Weitere Primzahltests	113
	C Titanische und sonderbare Primzahlen	123
	D Faktorisierung	126
	E Kryptographie mit öffentlichem Schlüssel	132
3	Gibt es primzahldefinierende Funktionen?	137
I	Funktionen mit der Eigenschaft (a)	137
II	Funktionen mit der Eigenschaft (b)	143
III	Primzahlerzeugende Polynome	144
	A Primzahlwerte linearer Polynome	146

B	Über quadratische Zahlkörper	146
C	Primzahlerzeugende quadratische Polynome	151
D	Der Wettlauf um Primzahlwerte und Primteiler .	155
IV	Funktionen mit der Eigenschaft (c)	158
4	Wie sind die Primzahlen verteilt?	163
I	Die Funktion $\pi(x)$	164
A	Historische Entwicklung	165
B	Summen unter Einschluss der Möbius-Funktion .	178
C	Primzahltabellen	179
D	Exakte Werte von $\pi(x)$ und Vergleiche mit $x/\log x$, $\text{Li}(x)$ und $R(x)$	180
E	Die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$	183
F	Nullstellenfreie Bereiche von $\zeta(s)$ und das Fehlerglied im Primzahlsatz	187
G	Einige Eigenschaften von $\pi(x)$	188
H	Die Verteilung der Werte von Eulers Funktion .	190
II	Die n -te Primzahl und Lücken zwischen Primzahlen .	191
A	Die n -te Primzahl	191
B	Lücken zwischen Primzahlen	192
III	Primzahlzwillinge	200
IV	Primzahlmehrlinge	206
V	Primzahlen in arithmetischer Folge	213
A	Es gibt unendlich viele!	213
B	Die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Folge	215
C	Primzahlreihen in arithmetischer Folge	217
VI	Goldbachs berühmte Vermutung	220
VII	Die Verteilung von Pseudoprimzahlen und Carmichael-Zahlen	226
A	Verteilung von Pseudoprimzahlen	226
B	Verteilung von Carmichael-Zahlen	228
C	Verteilung von Lucas-Pseudoprimzahlen	230
5	Welche besonderen Arten von Primzahlen wurden untersucht?	233
I	Reguläre Primzahlen	233
II	Sophie-Germain-Primzahlen	237
III	Wieferich-Primzahlen	240
IV	Wilson-Primzahlen	245
V	Repunit-Primzahlen	246

VI	Zahlen der Form $k \times b^n \pm 1$	248
VII	Primzahlen und linear rekurrente Folgen zweiter Ordnung	256
6	Heuristische und probabilistische Betrachtungen	263
I	Primzahlwerte linearer Polynome	264
II	Primzahlwerte von Polynomen beliebigen Grades	267
III	Polynome mit großen Bereichen zerlegbarer Werte	275
IV	Partitio Numerorum	277
Anhang		283
Ausklang		287
Literatur		289
Webseiten		333
Primzahlen bis 10 000		337
Verzeichnis der Tabellen		341
Verzeichnis der Rekorde		343
Namensverzeichnis		345
Sachverzeichnis		359