

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur zweiten Auflage	vii
Vorwort zur ersten Auflage	ix
Danksagungen	xi
Anleitung für den Leser	xvii
Erklärung der Symbole	xix
Einleitung	1
1 Wie viele Primzahlen gibt es?	3
I Beweis von Euklid	3
II Ein Beweis von Goldbach!	6
III Beweis von Euler	8
IV Beweis von Thue	10
V Drei vergessene Beweise	10
A Beweis von Perott	11
B Beweis von Auric	11
C Beweis von Métrod	12
VI Beweis von Washington	12
VII Beweis von Furstenberg	13
2 Wie kann man Primzahlen erkennen?	15
I Das Sieb des Eratosthenes	16
II Einige grundlegende Sätze über Kongruenzen	17

A	Der kleine Satz von Fermat und Primitivwurzeln modulo einer Primzahl	17
B	Der Satz von Wilson	20
C	Die Eigenschaften von Giuga und von Wolstenholme	22
D	Primzahlpotenzen als Teiler der Fakultät einer Zahl	24
E	Der chinesische Restsatz	27
F	Die Eulersche φ -Funktion	28
G	Folgen von Binomialzahlen	34
H	Quadratische Reste	37
III	Klassische Primzahltests auf der Grundlage von Kongruenzen	39
IV	Lucas-Folgen	44
V	Primzahltests auf der Grundlage von Lucas-Folgen . . .	59
VI	Fermat-Zahlen	71
VII	Mersenne-Zahlen	76
VIII	Pseudoprimzahlen	90
A	Pseudoprimzahlen zur Basis 2 (psp)	90
B	Pseudoprimzahlen zur Basis a ($\text{psp}(a)$)	94
C	Euler-Pseudoprimzahlen zur Basis a ($\text{epsp}(a)$) . .	97
D	Starke Pseudoprimzahlen zur Basis a ($\text{spsp}(a)$) .	98
IX	Carmichael-Zahlen	102
X	Lucas-Pseudoprimzahlen	105
A	Fibonacci-Pseudoprimzahlen	106
B	Lucas-Pseudoprimzahlen ($\text{lpsp}(P, Q)$)	108
C	Euler-Lucas-Pseudoprimzahlen ($\text{elpsp}(P, Q)$) und starke Lucas-Pseudoprimzahlen ($\text{slpsp}(P, Q)$) . .	109
D	Carmichael-Lucas-Zahlen	110
XI	Primzahltests und Faktorisierung	111
A	Aufwand für einen Primzahltest	112
B	Weitere Primzahltests	113
C	Titanische und sonderbare Primzahlen	123
D	Faktorisierung	126
E	Kryptographie mit öffentlichem Schlüssel	132
3	Gibt es primzahldefinierende Funktionen?	137
I	Funktionen mit der Eigenschaft (a)	137
II	Funktionen mit der Eigenschaft (b)	143
III	Primzahlerzeugende Polynome	144
A	Primzahlwerte linearer Polynome	146

	B	Über quadratische Zahlkörper	146
	C	Primzahlerzeugende quadratische Polynome . . .	151
	D	Der Wettlauf um Primzahlwerte und Primteiler .	155
IV		Funktionen mit der Eigenschaft (c)	158
4		Wie sind die Primzahlen verteilt?	163
I		Die Funktion $\pi(x)$	164
	A	Historische Entwicklung	165
	B	Summen unter Einschluss der Möbius-Funktion .	178
	C	Primzahltabellen	179
	D	Exakte Werte von $\pi(x)$ und Vergleiche mit $x/\log x$, $\text{Li}(x)$ und $R(x)$	180
	E	Die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$	183
	F	Nullstellenfreie Bereiche von $\zeta(s)$ und das Feh- lerglied im Primzahlsatz	187
	G	Einige Eigenschaften von $\pi(x)$	188
	H	Die Verteilung der Werte von Eulers Funktion .	190
II		Die n -te Primzahl und Lücken zwischen Primzahlen .	191
	A	Die n -te Primzahl	191
	B	Lücken zwischen Primzahlen	192
III		Primzahlzwillinge	200
IV		Primzahlmehrlinge	206
V		Primzahlen in arithmetischer Folge	213
	A	Es gibt unendlich viele!	213
	B	Die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Folge	215
	C	Primzahlreihen in arithmetischer Folge	217
VI		Goldbachs berühmte Vermutung	220
VII		Die Verteilung von Pseudoprimzahlen und Carmichael- Zahlen	226
	A	Verteilung von Pseudoprimzahlen	226
	B	Verteilung von Carmichael-Zahlen	228
	C	Verteilung von Lucas-Pseudoprimzahlen	230
5		Welche besonderen Arten von Primzahlen wurden untersucht?	233
I		Reguläre Primzahlen	233
II		Sophie-Germain-Primzahlen	237
III		Wieferich-Primzahlen	240
IV		Wilson-Primzahlen	245
V		Repunit-Primzahlen	246

VI	Zahlen der Form $k \times b^n \pm 1$	248
VII	Primzahlen und linear rekurrente Folgen zweiter Ordnung	256
6	Heuristische und probabilistische Betrachtungen	263
I	Primzahlwerte linearer Polynome	264
II	Primzahlwerte von Polynomen beliebigen Grades	267
III	Polynome mit großen Bereichen zerlegbarer Werte . . .	275
IV	Partitio Numerorum	277
	Anhang	283
	Ausklang	287
	Literatur	289
	Webseiten	333
	Primzahlen bis 10 000	337
	Verzeichnis der Tabellen	341
	Verzeichnis der Rekorde	343
	Namensverzeichnis	345
	Sachverzeichnis	359