

Inhalt

A. Einleitung	XV
Das Objekt	XV
Die Sache	XV
Die Publikation der Sache	XV
Einordnung	XVI
Reelle Zahl und Konvergenz	XVI
Der Autor	XVIII
Das Manuskript	XVIII
Die anderen Manuskripte – im Vergleich	XIX
Perspektive	XX
Vorschau, Warnung und Hinweise	XXI
1 Der Text:⁷ Die Grundlehren der Arithmetik	1
1.1 Begriff der Zahl	1
1.1.1 Wie bezeichnet man die Zahlen?	2
1.1.2 Die Zahl Null	2
1.1.3 Eins und Einheit; benannte und unbenannte Zahlen	2
1.1.4 Addition von Zahlen und ihre Grundgesetze	3
1.1.5 Erste Folgerungen	4
1.1.6 Die allgemeine Art, durch Addition Polynome zu bilden	6
Gleichheit dieser Polynome	7
1.1.7 Multiplikation von Zahlen und ihre Grundgesetze	7
1.1.8 Erste Folgerungen	9
1.1.9 Das Distributivgesetz	9
1.1.10 Die allgemeine Art, durch Multiplikation Polynome zu bilden	10
1.1.11 Allgemeinere Folgerungen	10
1.1.12 Die allgemeine Art, durch Addition und Multiplikation Polynome zu bilden	11
1.1.13 Größter gemeinsamer Teiler – kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches	12
1.2 Begriff der Zahlengröße	14
1.2.1 Addition der Zahlengrößen	16
1.2.2 Zur Multiplikation der Zahlengrößen	18
1.2.3 Gleichheit und Größer-Relation von Zahlengrößen	18
1.2.4 Teile einer Zahlengröße	19
Ausblick	20
1.3 Brüche	21
1.3.1 Gleichheit für Brüche, die Größer-Relation	22
1.3.2 Addition von Brüchen, ihre Eigenschaften	24
1.3.3 Multiplikation von Brüchen, ihre Eigenschaften	25

1.4	Subtraktion für Zahlengrößen, Entgegengesetzte	28
1.5	Rationale Zahlen	31
1.5.1	Addition von rationalen Zahlen	33
1.5.2	Subtraktion von rationalen Zahlen, Entgegengesetzte	34
1.5.3	Nullen	36
1.5.4	Multiplikation von rationalen Zahlen und ihre Gesetze	37
1.5.5	Multiplikation von Polynomen	39
1.5.6	Multiplikation mit Null	39
1.5.7	Divisionsverfahren für rationale Zahlen	40
	Keine Division mit Null	41
1.6	Irrationale Zahlen	42
1.6.1	Rechtfertigung	42
1.6.2	Begriff der Irrationalzahl	43
1.6.3	Gleichheit, ihre Eigenschaften	43
1.6.4	Größer sein	44
	Unendliche Umformungen einer Irrationalzahl	45
1.6.5	Addition von Irrationalzahlen	46
1.6.6	Unendlich große Irrationalzahlen	46
1.6.7	Bestimmtheit der Addition	47
1.7	Reelle Zahlen	47
1.7.1	Begriff, Gleichheit, (Addition, Subtraktion)	47
1.7.2	Die reelle Null	52
1.6.8	Multiplikation von Irrationalzahlen	53
1.8	Reihen und unendliche Produkte. Summierbarkeit	54
1.8.1	Reihen aus Irrationalzahlen. Summierbarkeit	54
1.6.9	Lehrsätze für Irrationalzahlen	57
1.8.2	Vorschau (oder Rückblick?)	60
1.6.10	Gesetze für Summen und ...	61
1.8.3	... Reihen aus Irrationalzahlen	61
1.8.4	Reihen aus Irrationalzahlen, aufs Neue	61
1.8.5	Multiplikation von Reihen aus Irrationalzahlen	62
1.7.3	Addition reeller Zahlen	63
1.7.4	Multiplikation reeller Zahlen	64
1.8.7	Hauptsatz über die reelle Konvergenz	65
1.8.9	Unendliche Produkte aus reellen Zahlen	68
1.9	Indirekte Operationen mit Irrationalzahlen und reellen Zahlen	69
1.9.1	Subtraktion reeller Zahlen	69
1.9.2	Division	69
	Division von Brüchen	70
	Division irrationaler Zahlen (1)	70
	Exkurs: Das Majorantenkriterium für Reihen aus Brüchen oder rationalen Zahlen	71
	Division irrationaler Zahlen (2)	72
	Division reeller Zahlen	72
1.10	Komplexe Zahlen	73
1.10.1	Rechtfertigung	73
1.10.2	Begriff sowie Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	75
1.10.3	Allgemeine Zielsetzung zum Begriff der Multiplikation komplexer Zahlen	76

1.10.4	Skalarmultiplikation komplexer Zahlen	76
	Der n^{te} Teil einer komplexen Zahl	76
	Definition der Skalarmultiplikation	77
1.10.5	Zur Beliebigkeit der Wahl komplexer Einheiten – eine Vorbetrachtung	79
1.10.6	Allgemeines Multiplikationsgesetz der komplexen Zahlen	81
	Konsequenzen aus der Geltung der Kommutativität der Multiplikation und des Distributivgesetzes	81
	Konsequenzen aus der Geltung der Assoziativität der Multiplikation	82
1.10.7	Allgemeine Divisionsregel für die komplexen Zahlen	85
1.10.8	Vereinfachung der Multiplikationsregel durch die Wahl geeigneter komplexer Einheiten	86
	Suche nach der komplexen Eins	86
	Suche nach einer bequemen zweiten komplexen Einheit	87
	Bedingungen für eine solche Einheit	87
	Bestimmung dieser zweiten komplexen Einheit	88
	Die Bedeutungen der beiden komplexen Einheiten	90
1.10.9	Geschichtlicher Rückblick auf die Herkunft der komplexen Zahlen	91
1.10.10	Ganze und GAUSS'sche Zahlen	92
1.11	Zahlen aus drei reellen Einheiten?	94
	Beurteilung	95
1.12	Reihen aus komplexen Zahlen	96
1.12.1	Der absolute Betrag von komplexen Zahlen	96
1.12.2	Der Begriff der Reihe	98
	Ein weiteres Kriterium	99
1.12.3	Bedingte und unbedingte Konvergenz	100
1.12.4	Hauptsatz über die komplexe Konvergenz	102
1.13	Unendliche Produkte aus komplexen Zahlen	103
1.13.1	Multiplikation unendlicher Produkte	108
1.13.2	Division unendlicher Produkte	108
B.	Traditionelle und Weierstraß'sche Konstruktionsabfolge im Vergleich	111
	Das Einfache, das sich als so schwer erwiesen hat	112
2	Heutige Form – Aspekte der Genese – Bewertung	113
2.1	Die natürlichen Zahlen nach Karl Weierstraß	113
2.1.1	Eins, Zwei, Null; Zahl, Gleichheit	113
	Die einzelnen Zahlen	115
2.1.2	Addition und ihre Gesetze	116
2.1.3	Multiplikation und ihre Gesetze	118
2.2	Die reellen Zahlen nach Karl Weierstraß	119
	Vorbemerkung	119
2.2.1	Natürliche Zahlen, Brüche, Irrationalzahlen; Addition und Multiplikation	119
2.2.2	Reelle Zahlen	120
2.2.3	Der Begriff Bestandteil – und ein substanzieller Gleichheitsbegriff für die Irrational- und die reellen Zahlen	122
2.2.4	Positionszahlen und der Darstellungssatz	123

2.3	Zum reellen Zahlbegriff: Punktuelle Quellenschau in anderen Vorlesungsnachschriften	126
2.3.1	Jede endliche Zahlgröße kann in jedem Positionssystem dargestellt werden – der Darstellungssatz bei WEIERSTRASS	126
2.3.2	Die Entfaltung des Begriffs der reellen Zahl in WEIERSTRASS' Vorlesungen in den 1860er und den frühen 1870er Jahren	128
	Die 1860er Jahre	128
	Das Ereignisjahr 1872	130
	Fazit	130
2.3.3	WEIERSTRASS' letztes Wort zur Sache (Winter 1882/83)	131
	Mengenlehre	131
	Zahlarten	133
	Der Hauptsatz über die reelle Konvergenz	134
	Die Division von Irrationalzahlen	135
2.4	Gesamtrück- und Ausblick	138
2.4.1	Mathematisch-summarischer Rückblick	138
	Was bleibt?	139
2.4.2	Philosophisch vertieft	139
2.4.3	Ausblick: Hyperreelle Zahlen à la Weierstraß?	140
2.5	Wieviel einfacher ist WEIERSTRASS' Konstruktion als die Dedekinds?	143
2.5.1	TRAUGOTT MÜLLERS Konstruktion der Irrationalzahlen im Jahr 1838 – und eine moderne Formulierung dafür	144
2.5.2	Traugott Müllers weitere Resultate	145
	Ein Missgriff Müllers – und dessen Korrektur	146
2.5.3	Vergleich Müller'sche (Dedekind'sche) und Weierstraß'sche Konstruktion	146
	Die Objekte „Irrationalzahl“	147
	Deren Operationen	147
	Die Relationen = und <	148
	Positionszahlen und Darstellungssatz	148
	Die Objekte „reelle Zahl“	148
2.5.4	Wann ist eine Quelle eine Quelle?	149
2.6	Vorlesungsabfolge und ihre Dokumentationen	150
C.	Aus gegebenem Anlass: Bemerkungen zur Entwicklung der Mathematik	151
	Unwiderleglicher Beweis des Satzes: „Mathematische Ideen sind schwer zu bilden!“	152
	Und wie steht es um die Idee der sogenannten „Dedekind-Schnitte“?	153
3	Anhang: Das Manuskript in diplomatischer Wiedergabe	155
	Grundlehren der Arithmetik	155
	Begriff der Zahl	155
	Addition von Zahlen	156
	Multiplication von Zahlen	158
	Größter gemeinsamer Theiler – kleinstes gemeinschaftliches Vielfache	161
	Begriff der Zahlengröße	162
	Addition der Zahlengrößen	163
	Complexe Zahlengrößen specieller Art	163
	Literatur	209
	Register	214