

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Einführung	1
2 Algebraische Grundlagen	13
2.1 Mengen	14
2.2 Abbildungen	19
2.3 Äquivalenzrelationen	25
2.4 Gruppen	34
2.4.1 Definition und Beispiele	34
2.4.2 Untergruppen und Normalteiler	41
2.5 Ringe und Körper	44
2.5.1 Definitionen und Beispiele	44
2.5.2 Körper der komplexen Zahlen	46
2.6 Homomorphismen	48
2.7 Vektorräume	54
2.7.1 Definitionen und Beispiele	54
2.7.2 Vektorraum - Homomorphismen	62
2.8 Duale Vektorräume	65
2.8.1 Dualitäten	65
2.8.2 Duale Abbildungen	70
2.9 Matrizen	72
2.9.1 Homomorphismen und Matrizen	72
2.9.2 Matrizenarithmetik	74
2.10 Basistransformationen	80
2.10.1 Basis- und Koordinatentransformationen	80
2.10.2 Transformationsformeln für Homomorphismen	82
2.11 Determinanten	84
2.11.1 Definition und Eigenschaften	84
2.11.2 Permutationen	86
2.11.3 Formeln von Leibniz und Laplace	87
2.11.4 Determinante eines Endomorphismus	93
2.12 Orientierung von Vektorräumen	94
3 Euklidische Geometrie	99
3.1 Bilinearformen	100
3.1.1 Definitionen und Beispiele	100
3.1.2 Isomorphismus $V \simeq V^*$	103

3.1.3	Adjungierter Homomorphismus	106
3.2	Euklidische Vektorräume	107
3.2.1	Definitionen und Beispiele	107
3.2.2	Assoziierte Vektoren	110
3.3	Orthogonalität	111
3.3.1	Orthogonale Vektoren	111
3.3.2	Orthogonalität in pseudo-Euklidischen Vektorräumen	115
3.3.3	Kreuzprodukt	119
3.4	Orthogonale Endomorphismen	122
3.4.1	Definition und Eigenschaften	122
3.4.2	Matrixdarstellung orthogonaler Endomorphismen	124
3.4.3	Spezielle orthogonale Endomorphismen	125
3.5	Lorentz-Räume	129
3.5.1	Allgemeine Lorentz-Raum Struktur	129
3.5.2	Lorentz-Transformationen	136
3.6	Affine Räume	140
3.6.1	Definitionen	141
3.6.2	Affine Abbildungen	143
3.6.3	Affine Koordinatensysteme	145
3.6.4	Koordinatendarstellung affiner Abbildungen	147
3.6.5	Affine Unterräume	151
3.6.6	Erlanger Programm	153
3.7	Euklidische Räume	154
3.7.1	Definitionen und Eigenschaften	154
3.7.2	Die Euklidische Gruppe	155
4	Raumzeit	161
4.1	Affine Raumzeit	161
4.2	Galilei-Raumzeit	168
4.3	Lorentz-Raumzeit	176
4.3.1	Lichtkegel	176
4.3.2	Kausalität der Lorentz-Raumzeit	178
4.3.3	Weltlinien und Eigenzeit	180
4.3.4	Simultane Hyperflächen und Ruhräume	184
4.3.5	Kinematik	189
4.3.6	Poincare-Gruppe	197
4.3.7	Dynamik	199
5	Tensoren	207
5.1	Bilineare und Multilineare Abbildungen	207
5.2	Tensorprodukte	212
5.2.1	Tensorprodukt zweier Vektorräume	212
5.2.2	Höhergradige Tensorprodukte	217
5.3	Tensorabbildungen	222
5.3.1	Produkt von Tensoren	222
5.3.2	Assoziierte Tensoren	223

5.3.3	Kontraktion	224
5.3.4	Pull-back und Push-forward	227
5.4	Symmetrische Multilinearformen	232
5.5	Alternierende Multilinearformen	235
5.5.1	Definition und Eigenschaften	235
5.5.2	Äußeres Produkt	237
5.5.3	Dualität und innere Produkte	245
5.5.4	Äußere (Grassmann) Algebra	250
5.6	Hodge-Dualität	252
6	Mannigfaltigkeiten	263
6.1	Topologische Räume	264
6.2	Differenzierbare Funktionen	276
6.3	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	285
6.4	Quotientenmannigfaltigkeiten	294
6.5	Projektive Räume	300
6.6	Glatte Abbildungen	303
6.7	Untermannigfaltigkeiten	309
6.7.1	Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen	312
6.7.2	Parametererzeugte Untermannigfaltigkeiten	316
6.7.3	Allgemeines zu Untermannigfaltigkeiten	319
6.8	Zerlegung der Eins	321
7	Lokalisierungen und Felder	325
7.1	Tangentialräume	325
7.1.1	Geometrische Interpretation von Tangentialräumen	326
7.1.2	Physikalische Interpretation von Tangentialräumen	329
7.1.3	Algebraische Interpretation von Tangentialräumen	330
7.2	Struktur der Tangentialräume	333
7.2.1	Struktur des Tangentialraumes $T_P(\mathcal{M})$	333
7.2.2	Struktur des Kotangentialraumes $T_P^*(\mathcal{M})$	336
7.3	Tangentialbündel	340
7.4	Tangentiale (Differentialiale)	342
7.5	Vektorfelder	349
7.5.1	Richtungsableitung bezüglich eines Vektorfeldes	352
7.5.2	Vektorfelder als Derivationen	354
7.5.3	Kommutator über Vektorfelder	355
7.5.4	Kovariante Vektorfelder	359
7.6	Vektorbündel und Tensorfelder	362
7.7	Pull-back und push-forward	367
8	Differentialformen	375
8.1	Äußere Algebra der Differentialformen	376
8.2	Pull-back zu Differentialformen	378
8.3	Äußere Ableitung	382
8.4	Poincare-Lemma	388

8.5	De Rham-Komplex	394
9	Fluss und Lie-Ableitung	405
9.1	Fluss eines Vektorfeldes	405
9.2	Derivationen	412
9.3	Lie-Ableitung	416
9.3.1	Lie-Ableitung für Vektorfelder	418
9.3.2	Lie-Ableitung für Tensorfelder	421
9.4	Lie-Ableitung zu Differentialformen	425
9.5	Integral-Mannigfaltigkeiten	429
10	Zusammenhang	437
10.1	Affiner Zusammenhang	438
10.2	Kovariante Ableitungen	443
10.3	Paralleltransport	448
10.4	Holonomie	455
10.5	Geodäten	457
10.6	Torsion	459
10.7	Krümmung	468
10.8	Zusammenhänge im Cartan-Kalkül	474
11	Riemannsche Geometrie	477
11.1	Mannigfaltigkeiten mit innerem Produkt	478
11.2	Induzierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten	482
11.3	Isometrische Abbildungen	486
11.4	Levi-Civita-Zusammenhang	493
11.5	LC-Zusammenhang über Differentialformen	500
11.6	Induzierte Levi-Civita-Zusammenhänge	503
11.7	Krümmung	508
11.8	Schnittkrümmungen	516
11.9	Hyperflächen im $\mathbb{R}^{m+1}$	523
11.10	Einstein-Räume und Einstein-Tensoren	530
11.11	Geodäten	532
11.11.1	Exponentialabbildung	540
11.11.2	Normalkoordinaten	542
11.11.3	Variation von Kurven - Geodäten kürzester Länge	545
12	Integrale und Variationen	555
12.1	Orientierung	555
12.2	Mannigfaltigkeiten mit Rand	567
12.3	Riemann-Integrale	571
12.4	Volumenformen	578
12.5	Integrale über Differentialformen	585
12.6	Integralsatz von Stokes	592
12.7	Variationsrechnung	597
12.8	Noether-Theorem	602

13 Differentialoperatoren	611
13.1 Gradient und Rotation	612
13.2 Divergenz	616
13.3 Kodifferential	619
13.4 Hodge-Laplace-Operator	623
13.5 Cartan-Kalkül	627
13.6 Integralsätze	630
14 Elektro-magnetische Felder	635
14.1 Maxwell-Gleichungen	635
14.2 Relativistische Elektrodynamik	644
14.3 Energie und Impuls	655
15 Gravitation	659
15.1 Newtonsche Gravitationstheorie	660
15.2 Äquivalenzprinzip	664
15.3 Blätterung der Raumzeit	674
15.4 Energie-Impuls-Tensor	689
15.5 Einsteinsche Feldgleichungen	696
15.6 3+1 Formalismus	704
16 Kontinuumsmechanik	711
16.1 Kinematik deformierbarer Körper	712
16.1.1 Deformation und Verzerrung	717
16.1.2 Bewegung in der Zeit	729
16.1.3 Objektivität	737
16.2 Kinetik deformierbarer Körper	741
16.2.1 Massebilanz	741
16.2.2 Master-Bilanz und Cauchy-Theorem	743
16.2.3 Impulsbilanzen und Spannungen	745
16.2.4 Energiebilanz	752
16.3 Konstitutive Gleichungen	756
16.3.1 Elastisch deformierbare Körper	757
16.3.2 Gase und Flüssigkeiten	761
A Nomenklatur	765
Literaturverzeichnis	773
Symbol- und Stichwortverzeichnis	779