

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Zielsetzung und Struktur des digitalen Buchs	1
1.2	Verzeichnisse	2
1.3	Bedienung und technische Konventionen	4
1.4	Ein Simulationsbeispiel: <i>Moebiusband</i>	6
2	Physik und Mathematik	9
2.1	Mathematik als „Sprache der Physik“	9
2.2	Physik und Infinitesimalrechnung	10
3	Zahlen	12
3.1	Natürliche Zahlen	12
3.2	Ganze Zahlen	15
3.3	Rationale Zahlen	16
3.4	Irrationale Zahlen	17
3.4.1	Algebraische Zahlen	17
3.4.2	Transzendente Zahlen	18
3.4.3	Die Zahl π und die Quadratur des Kreises nach Archimedes	18
3.5	Reelle Zahlen	22
3.6	Komplexe Zahlen	23
3.6.1	Darstellung als Paar reeller Zahlen	23
3.6.2	Normaldarstellung mit „imaginärer Einheit i “	25
3.6.3	Komplexe Ebene	28
3.6.4	Darstellung in Polarkoordinaten	29
3.6.5	Simulation von komplexer Addition und Subtraktion	30
3.6.6	Simulation von komplexer Multiplikation und Division	32
3.7	Erweiterungen der Arithmetik	33
4	Zahlen-Folgen, Reihen und Grenzwerte	36
4.1	Folgen und Reihen	36
4.1.1	Folge und Reihe der natürlichen Zahlen	36
4.1.2	Geometrische Reihe	37
4.2	Grenzwert, Limes	38
4.3	Fibonacci-Folge	41
4.4	Komplexe Folgen und Reihen	43
4.4.1	Komplexe geometrische Folge und Reihe	44

4.4.2	Komplexe exponentielle Folge und Exponentialreihe	45
4.5	Einfluss von begrenzter Messgenauigkeit und Nichtlinearität	49
4.5.1	Zahlen in Mathematik und Physik	49
4.5.2	Reelle Folge mit nichtlinearem Bildungsgesetz: Logistische Folge	52
4.5.3	Komplexe Folge mit nichtlinearem Bildungsgesetz: Fraktale	58
5	Funktionen und ihre infinitesimalen Eigenschaften	64
5.1	Definition von Funktionen	64
5.2	Differenzenquotient und Differentialquotient	65
5.3	Ableitungen einiger Grundfunktionen	66
5.3.1	Potenzen und Polynome	66
5.3.2	Exponentialfunktion	68
5.3.3	Winkelfunktionen	68
5.3.4	Regeln zum Differenzieren zusammengesetzter Funktionen	69
5.3.5	Weitere Ableitungen von Grundfunktionen	69
5.4	Reihenentwicklung (1), Taylorreihe	70
5.4.1	Koeffizienten der Taylorreihe	70
5.4.2	Näherungsformeln für einfache Funktionen	74
5.4.3	Ableitung von Formeln und Fehlergrenzen bei der numerischen Differentiation	75
5.4.4	Interaktive Visualisierung von Taylorentwicklungen	76
5.5	Graphische Darstellung von Funktionen	79
5.5.1	Funktionen mit ein bis drei Variablen	79
5.5.2	Funktionen von vier Variablen: Weltlinie in der speziellen Relativitätstheorie	82
5.5.3	Allgemeine Eigenschaften von Funktionen $y = f(x)$	84
5.5.4	„Exotische“ Funktionen	85
5.6	Grenzübergang zum Differentialquotienten	86
5.7	Ableitung und Differentialgleichungen	89
5.8	Phasenraum-Diagramme	90
5.9	Integral	91
5.9.1	Definition der Stammfunktion durch ihre Differentialgleichung	91
5.9.2	Bestimmtes Integral und Anfangswert	92
5.9.3	Integral als Grenzwert einer Summe	93
5.9.4	Riemannsche Integraldefinition	95
5.9.5	Lebesgue-Integral	97
5.9.6	Regeln für die analytische Integration	98
5.9.7	Numerische Integrationsmethoden	99
5.9.8	Fehlerabschätzung bei numerischer Integration	101
5.10	Reihenentwicklung (2): Die Fourierreihe	103
5.10.1	Taylorreihe und Fourierreihe	103

5.10.2	Bestimmung der Fourier-Koeffizienten	105
5.10.3	Veranschaulichung der Berechnung von Koeffizienten und Spektrum	106
5.10.4	Beispiele für Fourier-Entwicklungen	108
5.10.5	Komplexe Fourierreihen	110
5.11	Numerische Lösung von Gleichungen: Iterationsverfahren	111
6	Veranschaulichung von Funktionen im reellen Zahlenraum	114
6.1	Standard-Funktionen $y = f(x)$	114
6.2	Einige physikalisch wichtige Funktionen $y = f(x)$	118
6.3	Standardfunktionen zweier Variablen $z = f(x, y)$	121
6.4	Wellen im Raum $z = f(x, y)$	125
6.5	Parameterdarstellung von Flächen im Raum $x = f_x(p, q);$ $y = f_y(p, q); z = f_z(p, q)$	127
6.6	Parameterdarstellung von Kurven im Raum $x = f_x(t); y = f_y(t);$ $z = f_z(t)$	130
7	Veranschaulichung von Funktionen im komplexen Zahlenraum	132
7.1	Konforme Abbildung	132
7.2	Komplexe Potenzfunktion	133
7.3	Komplexe Exponentialfunktion	137
7.4	Komplexe Winkelfunktionen: Sinus, Cosinus, Tangens	140
7.4.1	Komplexer Sinus	140
7.4.2	Komplexer Cosinus	142
7.4.3	Komplexer Tangens	142
7.5	Komplexer Logarithmus	143
8	Vektoren	146
8.1	Vektoren und Operatoren als „Kurzschrift“ für n -Tupel von Zahlen und Funktionen	146
8.2	3D-Visualisierung von Vektoren	147
8.3	Grundoperationen der Vektoralgebra	150
8.3.1	Multiplikation mit einer Konstanten	150
8.3.2	Addition und Subtraktion	150
8.3.3	Skalarprodukt, Inneres Produkt	151
8.3.4	Vektorprodukt, Äußeres Produkt	151
8.4	Visualisierung der Grundoperationen für Vektoren	152
8.5	Felder	154
8.5.1	Skalarfelder und Vektorfelder	154
8.5.2	Visualisierungsmöglichkeiten für Skalar- und Vektorfelder	154
8.5.3	Grundformalismen der Vektoranalysis	155
8.5.4	Potentialfelder von Punktquellen als 3D-Fläche	158

8.5.5	Potentialfelder von Punktquellen als Konturdiagramm	160
8.5.6	Ebene Vektorfelder	162
8.5.7	3D-Feld von Punktladungen	165
8.5.8	3D-Bewegung einer Punktladung in einem homogenen elektromagnetischen Feld	165
9	Gewöhnliche Differentialgleichungen	169
9.1	Allgemeines	169
9.2	Differentialgleichungen als „Erzeugende“ von Funktionen	170
9.3	Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen	177
9.4	Numerische Lösungsverfahren, Anfangswertproblem	179
9.4.1	Explizites Euler-Verfahren	180
9.4.2	Heun-Verfahren	181
9.4.3	Runge-Kutta-Verfahren	184
9.4.4	Weiterentwicklungen	185
9.5	Simulationen von gewöhnlichen Differentialgleichungen	186
9.5.1	Vergleich von Euler-, Heun- und Runge-Kutta-Verfahren	186
9.5.2	Differentialgleichung erster Ordnung	188
9.5.3	Differentialgleichung zweiter Ordnung	192
9.5.4	Differentialgleichungen für Oszillatoren und Schwerependel	196
9.5.5	Schlussfolgerungen für den Charakter von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen	199
9.5.6	Chaotische Lösungen von gekoppelten Differentialgleichungen	200
10	Partielle Differentialgleichungen	206
10.1	Einige wichtige partielle Differentialgleichungen der Physik	206
10.2	Simulation der Diffusionsgleichung	209
10.3	Simulation der Schrödingergleichung	209
10.4	Simulation der Wellengleichung einer schwingenden Saite	212
11	Sammlung von Physik-Simulationen	214
11.1	Simulationen mittels OSP/EJS-Programm	214
11.2	Eine kurze Einführung in EJS (Easy Java Simulation)	216
11.3	Veröffentlichte EJS-Simulationen	223
11.3.1	Elektrodynamik	224
11.3.2	Felder und Potentiale	225
11.3.3	Mathematik, Differentialgleichungen	225
11.3.4	Mechanik	227
11.3.5	Newton	230
11.3.6	Optik	230
11.3.7	Oszillatoren und Pendel	231
11.3.8	Quantenmechanik	233

11.3.9 Relativitätstheorie	233
11.3.10 Statistik	234
11.3.11 Thermodynamik	234
11.3.12 Wellen	235
11.3.13 Sonstiges	236
11.4 OSP-Simulationen, die nicht mit EJS erstellt wurden	238
11.4.1 Liste der OSP-Launcherpakete	240
11.5 In Launcher verpackte EJS-Simulationen	244
11.6 Kosmologische Simulationen von <i>Eugene Butikov</i>	245
12 Schlussbemerkung	250