

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Einleitung .....</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Teil I Theoretischer Hintergrund zu Begründungsprozessen in einem empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht</b> |           |
| <b>2 Konstruktivistische Lerntheorie .....</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1 Konstruktivistische Lerntheorie in der Mathematikdidaktik .....  | 9         |
| 2.1.1 Ernst von Glaserfeld und der Radikale Konstruktivismus .....   | 10        |
| 2.1.2 Heinrich Bauersfeld und der Interaktionismus .....   | 18        |
| 2.2 Bereichsspezifität von Wissen .....  | 25        |
| 2.2.1 Microworlds nach Robert W. Lawler .....  | 26        |
| 2.2.2 Subjektive Erfahrungsbereiche nach Heinrich Bauersfeld .....   | 30        |
| <b>3 Auffassungen von Mathematik .....</b>   | <b>37</b> |
| 3.1 Präzisierung des Begriffs der Auffassung .....   | 42        |
| 3.2 Empirische und formalistische Auffassungen von Mathematik .....  | 47        |
| 3.2.1 Empirische und formalistische Auffassung am Beispiel der reellen Zahlen .....                                      | 47        |
| 3.2.2 Historische Entwicklung der Auffassungen von Mathematik .....  | 57        |
| 3.2.3 Eine lerntheoretische und entwicklungspsychologische Perspektive auf Mathematikauffassungen .....                  | 64        |
| 3.3 Das strukturalistische Theorienkonzept .....   | 69        |

|   |     |
|---|-----|
| <b>4 Begründungen in einer formalistischen und empirischen Mathematik .....</b>                         | 75  |
| 4.1 Begriffliche Grundlagen – Begründung, Argumentation und Beweis .....                                | 75  |
| 4.2 Erkenntniswege in empirischen Wissenschaften und einer formalistischen Mathematik .....             | 81  |
| 4.2.1 Funktionen von Begründungen .....   | 83  |
| 4.2.2 Erkenntnisprozesse in empirischen Wissenschaften .....  | 85  |
| 4.2.3 Erkenntnisprozesse in einer formalistischen Mathematik .....                                      | 90  |
| 4.2.4 Erkenntnisprozesse im Mathematikunterricht .....  | 91  |
| <b>5 Empirische Settings und digitale Medien .....</b>  | 103 |
| 5.1 Das CSC-Modell .....  | 103 |
| 5.2 Empirische Settings als Elemente von (digitalen) Medien .....                                       | 110 |
| <br><b>Teil II Fallstudien zu Begründungsprozessen mit empirischen Settings in der Sekundarstufe II</b> |     |
| <b>6 Forschungsdesign .....</b>   | 115 |
| 6.1 Spezifikation der Forschungsfragen in Bezug auf den Theorieteil .....                               | 115 |
| 6.2 Methodik .....  | 118 |
| 6.2.1 Datenerhebung und -auswahl .....  | 120 |
| 6.2.2 Datenanalyse .....  | 123 |
| <b>7 Begründung auf der Grundlage einer Schulbuchabbildung .....</b>                                    | 127 |
| 7.1 Das spezifische Forschungsinteresse .....   | 127 |
| 7.2 Das Schulbuch im Mathematikunterricht .....   | 128 |
| 7.3 Schulbuchabbildung zu Symmetriekriterien für Funktionsgraphen .....                                 | 131 |
| 7.4 Fallstudie .....  | 135 |
| 7.4.1 Schüler A .....   | 135 |
| 7.4.2 Schüler B .....   | 142 |
| 7.4.3 Schüler C .....   | 149 |
| 7.5 Ergebnisdiskussion .....  | 157 |

---

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| <b>8</b>  | <b>Der Integraph – Begründung auf der Grundlage eines mathematischen Zeichengerätes .....</b>                          | 161 |
| 8.1       | Das spezifische Forschungsinteresse .....  | 161 |
| 8.2       | Historische Zeichengeräte im Mathematikunterricht .....  | 162 |
| 8.3       | Der Integraph und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....   | 164 |
| 8.4       | Fallstudie .....   | 171 |
| 8.4.1     | Schüler D .....  | 171 |
| 8.4.2     | Schüler E .....  | 176 |
| 8.4.3     | Schüler F .....  | 180 |
| 8.5       | Ergebnisdiskussion .....   | 184 |
| <b>9</b>  | <b>Das Applet Integrator – Begründung auf der Grundlage von Dynamischer Geometrie-Software .....</b>                   | 189 |
| 9.1       | Das spezifische Forschungsinteresse .....  | 189 |
| 9.2       | Dynamische Geometrie-Software im Mathematikunterricht .....  | 190 |
| 9.3       | Der Integrator als GeoGebra-Applet zu Ober- und Untersummen .....  | 197 |
| 9.4       | Fallstudie .....   | 200 |
| 9.4.1     | Schülerin G .....  | 200 |
| 9.4.2     | Schüler H .....  | 211 |
| 9.4.3     | Schülerin J .....  | 216 |
| 9.5       | Ergebnisdiskussion .....   | 226 |
| <b>10</b> | <b>Die App Calcflow – Begründung auf der Grundlage einer Virtual-Reality-Umgebung zur Analytischen Geometrie .....</b> | 231 |
| 10.1      | Das spezifische Forschungsinteresse .....  | 231 |
| 10.2      | Die Virtual-Reality-Technologie im Mathematikunterricht .....  | 232 |
| 10.3      | Die VR-App Calcflow und Orthogonalprojektionen von Vektoren .....  | 239 |
| 10.4      | Fallstudie .....   | 242 |
| 10.4.1    | Schüler D .....  | 242 |
| 10.4.2    | Schüler E .....  | 251 |
| 10.4.3    | Schüler F .....  | 256 |
| 10.5      | Ergebnisdiskussion .....   | 266 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>11 Begründung auf der Grundlage der 3D-Druck-Technologie</b> ..... | 269 |
| 11.1 Das spezifische Forschungsinteresse .....                        | 269 |
| 11.2 Die 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht .....           | 270 |
| 11.3 3D-Druck und Summen natürlicher Zahlen .....                     | 276 |
| 11.4 Fallstudie .....   | 282 |
| 11.4.1 Schülerin G und Schülerin K .....                              | 282 |
| 11.4.2 Schüler H und Schülerin J .....                                | 318 |
| 11.5 Ergebnisdiskussion .....   | 336 |
| <b>12 Fazit</b> .....   | 345 |
| <b>Literatur</b> .....  | 367 |