

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
I Beweise und Beweistechnik	1
1 Was ist Mathematik?	3
1.1 Ausgewählte Antworten	4
1.2 Zusammenfassung	7
1.3 Empfehlenswerte Bücher	8
2 Mathematisch für Anfänger	11
2.1 Lektion 1: Vom Wort zum Satz	12
2.2 Lektion 2: Universelles Vokabular	17
2.3 Lektion 3: Prädikate	18
2.4 Lektion 4: Konjunktionen (Überleitungen)	20
2.5 Lektion 5: Schlussworte, Schlusspunkte	22
3 Beweise, immer nur Beweise	23
3.1 Beweisen lernen	23
3.2 Der Zweck der Übungen	24
3.3 Unterscheide wahr und falsch	24
3.4 Einige Gebote und Verbote	24
3.5 Mathematik ist Struktur	25
3.6 Mathematik für und durch die Praxis	26
3.7 Und wie lernt man beweisen?	26
4 Die Beweisverfahren	27
4.1 Der direkte Beweis	27
4.1.1 Einfache Zahlentheorie	27
4.1.2 Aussagenlogik	29
4.1.3 Gesetze der Aussagenlogik	31
4.1.4 Mengenlehre	32
4.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient	33
4.2 Der indirekte Beweis	35
4.2.1 Wurzel aus 2 ist nicht rational.	35
4.2.2 Es gibt unendlich viele Primzahlen	36
4.3 Der konstruktive Beweis	37
4.3.1 Nullstelle einer Funktion	37
5 Das Prinzip der vollständigen Induktion	39
5.1 Wer hat die vollständige Induktion erfunden?	40
5.2 Ist Induktion nur für Folgen und Reihen?	41
5.3 Wie funktioniert die vollständige Induktion?	41
5.4 Kann man sich auf die vollständige Induktion verlassen?	43
5.5 Kann man wirklich den Induktionsschluss unendlich oft anwenden? ..	44

5.6	Kann man Induktion immer anwenden?	45
5.7	Induktion ist nicht geeignet, wenn	46
5.8	Was ist schwer an der vollständigen Induktion?	47
5.9	Anwendungen der vollständigen Induktion	47
5.9.1	Geometrie	47
5.9.2	Mengenlehre	49
5.9.3	Binomialkoeffizienten	50
5.9.4	Geometrisches und arithmetisches Mittel	52
5.9.5	Summenformeln	53
5.9.6	Abschätzungen	56
5.9.7	Teilbarkeit	57
5.9.8	Zahlentheorie	58
5.9.9	Rekursiv definierte Folgen	59
5.9.10	Eindeutigkeitsbeweis	60
5.10	Zum Schluss	61
6	Der unendliche Abstieg	63
6.1	Einführung	63
6.2	$\sqrt{2}$ ist irrational	64
6.2.1	Das übliche Verfahren	64
6.2.2	$\sqrt{2}$ ist irrational mit unendlichem Abstieg	64
6.3	Diskussion der Methode	66
6.3.1	Ist auch $\sqrt{9}$ irrational?	66
6.3.2	Ist die Wurzel aus 5 irrational?	67
6.3.3	Die Wurzel einer Nicht-Quadratzahl ist irrational	67
6.4	Inkommensurable Längen im Fünfeck	67
7	Über das Auswahlaxiom	69
7.1	Das Auswahlproblem	69
7.2	Das Auswahlaxiom	70
7.3	Wohlordnung	71
7.4	Lemma von Zorn	72
7.5	Äquivalenz der Aussagen	74
8	Das Kugelwunder	79
8.1	Einleitung	79
8.2	Die freie Gruppe mit zwei Erzeugern	80
8.3	Paradoxe Zerlegung einer löchrigen Sphäre	85
8.4	Von der löchrigen Sphäre zur Vollkugel	89
8.5	Abschluss	93
II	Lineare Algebra	95
9	Lineare Algebra für absolute Anfänger	97
9.1	Einführung	97

9.2	Vektorräume	98
9.3	Untervektorräume	103
9.4	Lineare Unabhängigkeit	107
9.5	Schluss	109
10	Lineare Gleichungssysteme	111
10.1	Einführung	111
10.2	Lineare Gleichungssysteme: Was ist das?	111
	10.2.1 Einführendes Beispiel	111
	10.2.2 Definitionen	113
	10.2.3 Darstellung mit Matrizen	114
10.3	Lösung linearer Gleichungssysteme	115
	10.3.1 Der Gaußsche Algorithmus	115
	10.3.2 Beispiel 1: Eindeutige Lösung	119
	10.3.3 Beispiel 2: Keine Lösung	122
	10.3.4 Beispiel 3: Unendlich viele Lösungen	123
10.4	Rangbestimmung einer Matrix	127
11	Lineare Abbildungen und ihre darstellenden Matrizen	129
11.1	Einführung	129
11.2	Lineare Abbildungen	130
11.3	Bild und Kern einer linearen Abbildung	131
11.4	Dimensionsformel und weitere Eigenschaften	133
11.5	Lineare Abbildung am Beispiel	134
11.6	Darstellungen linearer Abbildungen am Beispiel	135
11.7	Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen	136
11.8	Berechnung einer Darstellungsmatrix am Beispiel	138
11.9	Abbilden mit einer darstellenden Matrix	141
11.10	Beispiel zum Basiswechsel	142
12	Determinanten	145
12.1	Einführung	145
12.2	Determinante: Was ist das?	146
12.3	Spezialfälle	147
	12.3.1 Der Fall $n = 1$	147
	12.3.2 Der Fall $n = 2$	148
	12.3.3 Der Fall $n = 3$	151
12.4	Der allgemeine Fall	154
12.5	Praktische Berechnung von Determinanten	159
	12.5.1 Der Gaußsche Algorithmus	159
	12.5.2 Die Laplacesche Entwicklungsformel	161
13	Diagonalisierbarkeit	163
13.1	Einführung	163
13.2	Diagonalisierbarkeit: Was ist das?	163

13.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	165
13.4	Eigenwerte und Eigenvektoren am Beispiel	169
13.5	Diagonalisierbarkeitskriterien	171
13.6	Eine praktische Anwendung	174

III Analysis 177

14	Die Standardlösungsverfahren für Polynomgleichungen	179
14.1	Lineare Gleichungen	179
14.2	Quadratische Gleichungen	180
14.3	Gleichungen dritten und vierten Grades	182
14.4	Weitere Lösungsverfahren für Spezialfälle	182
14.4.1	n -te Wurzeln	182
14.4.2	Biquadratische Gleichung	183
14.4.3	Andere durch Substitution lösbare Gleichungen	184
14.4.4	Ein Spezialfall des Wurzelziehens	184
14.4.5	Binom-Gleichungen	185
14.4.6	Gradreduzierung durch Ausklammern	186
14.4.7	Gradreduzierung durch Polynomdivision	186
14.5	Seltene Lösungsmethoden und Approximationen	188
14.5.1	Methode des Quadrat-Extrems	188
14.5.2	Die Newton-Iteration	188
14.5.3	Regula falsi	190
14.5.4	Das allseits beliebte Raten	191
14.5.5	Das „höhere Raten“	193
14.5.6	Symmetrische Koeffizienten	194
14.6	Abschluss	195
15	Differentialgleichungen	197
15.1	Einführung	197
15.2	Klassifikation vor der Lösung	198
15.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	199
15.3.1	Einfachstes Beispiel	199
15.3.2	Homogene Gleichung	200
15.3.3	Inhomogene Gleichung	200
15.4	Die Probe machen	202
15.5	Nichtlineare Differentialgleichungen	203
15.5.1	Trennung der Veränderlichen	203
15.5.2	Substitution	205
15.5.3	Bernoulli-Differentialgleichung	207
15.5.4	Riccati-Differentialgleichung	208
15.5.5	Exakte Differentialgleichung	210
15.5.6	Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)	213

15.5.7	Parametrisierung	215
15.5.8	Clairaut-Differentialgleichung	217
15.5.9	d'Alembert-Differentialgleichung	218
15.6	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	219
15.6.1	Konstante Koeffizienten	219
15.6.2	Eulersche Differentialgleichung	224
16	Die Beziehungen von Sinus und Cosinus	227
16.1	Additionstheoreme	227
16.2	Multiplikationstheoreme	231
16.3	Theoreme zu doppelten und halben Winkeln	233
16.4	Theoreme mit Arcus-Funktionen	235
16.5	Alternative Herleitungen mit komplexen Zahlen	236
16.5.1	Additionstheoreme	236
16.5.2	Weitere Beziehungen	237
17	Doppelintegrale	239
17.1	Einführung	239
17.2	Doppelintegral über einem Rechteck	240
17.3	Doppelintegral über einem allgemeineren Bereich	244
17.4	Eigenschaften und Mittelwertsätze	248
17.5	Koordinatentransformation	250
17.6	Polarkoordinaten	253
18	Kurvenintegrale	257
18.1	Begriffe und Definitionen	257
18.2	Kurvenlänge	258
18.3	Kurvenintegral bezüglich der Bogenlänge	260
18.4	Kurvenintegral über ein Vektorfeld	261
18.5	Eigenschaften der Kurvenintegrale	264
18.6	Kurvenintegrale über Gradientenfeldern	265
19	Oberflächenintegrale	267
19.1	Einführung	267
19.2	Oberflächeninhalt	269
19.3	Oberflächenintegrale einer skalaren Funktion	272
19.4	Flussintegrale	274
20	Eulers Berechnungen der Zetafunktion	279
21	Die Riemannsche Vermutung	283
21.1	Die Riemannsche Zetafunktion	284
21.1.1	Meromorphe Fortsetzung	285
21.1.2	Die Nullstellen	286
21.1.3	Die Vermutung	288
21.2	Die Primzahlfunktion	289
21.2.1	Die Eulersche Produktentwicklung	289

21.2.2 Die Primzahlfunktion	290
21.2.3 Die Jagd auf die Schwelle	293
21.2.4 Die Beweisideen	293
22 Die Sätze von Heine-Borel, Bolzano-Weierstraß und Montel .	297
22.1 Vorbereitungen	297
22.2 Kompaktheit in normierten Räumen	299
22.3 Der Satz von Montel	300
22.4 Abschluss	305
23 Geometrie in der Teetasse	307
Literaturverzeichnis	313
Index	317