

# Inhaltsverzeichnis

1	PERSPEKTIVEN EINER EMPIRISTISCHEN GRUNDLEGUNG	
	MATHEMATISCHER THEORIEN .....	1
1.1	Einleitung.....	1
1.2	Methodologische Prinzipien der Formulierung einer verhaltensorientierten Metatheorie .....	4
1.3	Empirische Theorie natürlicher Zahlen:	
	Zahlen als Schriftzeichen.....	9
1.3.1	Empirische Objektbereiche und Strukturformate .....	9
	1.3.1.1 Grundlegende Definitionen .....	9
	1.3.1.2 Repräsentation von Strukturmerkmalen .....	12
1.3.2	Paradigmatische Verhaltensbeschreibungen.....	14
1.3.3	Modellbildung als Mittel metatheoretischer Analyse .....	17
	1.3.3.1 Strukturmodell.....	18
	1.3.3.2 Sprachmodell.....	21
	1.3.3.3 Gültigkeitsrelation .....	24
1.3.4	Zahlen als Abstraktionen .....	30
	1.3.4.1 Strukturelle Modellierung.....	31
	1.3.4.2 Sprachliche Modellierung.....	33
1.3.5	Revision des modelltheoretischen Ansatzes:	
	Empiriegehalt mathematischer Modelle .....	42
	1.3.5.1 Konzeptuelle Niveaus: Formelgraphische Realisierungen metatheoretischer Terme .....	42
	1.3.5.2 Sprechweisen und Beschreibungssysteme.....	52
	1.3.5.3 Empirische Semantik als metatheoretische Analogie .....	56
	1.3.5.4 Spezialfall: Validierung von Modellen.....	62
	1.3.5.5 Wahrheitspersistenz unter metatheoretisch variablen Bedingungen .....	64
	1.3.5.6 Methodologische Bemerkungen .....	73

1.4	Weitere Beispiele empirischer Interpretationen.....	75
1.4.1	Natürliche Zahlen als Punktmuster.....	76
1.4.2	Empirische Verknüpfungsgebilde .....	81
1.4.3	Empirische Logik .....	83
1.4.4	Empirische Geometrie .....	85
1.5	Zusammenfassung und Ausblick .....	87
1.6	Anhang: Prädikatenlogische Formalisierungen von Objektheorien .....	89
1.6.1	Theorie der Verknüpfungsgebilde .....	90
1.6.2	Theorie prädikatenlogischer Formeln.....	94
2	ZUR HERLEITUNG ALGEBRAISCHER IDENTITÄTEN AUS GEOMETRISCHEN PRINZIPIEN – METHODOLOGISCHE ANALYSE EINES FALLBEISPIELS .....	99
2.1	Einleitung.....	99
2.2	Empirische reelle Zahlen .....	102
2.3	Empirische Geometrie .....	105
2.4	Präzisierung eines Beweises .....	109
2.5	Kognitive Strategien und ihre wissenschaftstheoretische Bewertung.....	112
2.6	Formaler Ansatz.....	116
2.7	Zusammenfassung .....	120
3	MATHEMATISCHE KONSISTENZANALYSE IM SPIEGEL EMPIRISCHER METHODOLOGIEN .....	123
3.1	Einleitung.....	123
3.2	Operative Semantik eines arithmetischen Aufgabenformats .....	127
3.2.1	Semantik arithmetischer Fragestellungen.....	127
3.2.2	Lösungsverfahren .....	129
3.2.2.1	Schriftliche Multiplikation .....	130

3.2.2.2	Geometrische Multiplikation .....	131
3.2.2.3	Multiplikation unter Einschluss physikalischer Faktoren .....	132
3.2.2.4	Umformungsverfahren: Motivation und Theorie .....	132
3.2.2.5	Umformungsverfahren: Praktische Anwendung .....	157
3.2.3	Methodologische Aspekte .....	163
3.2.3.1	Schriftliche Multiplikation .....	163
3.2.3.2	Geometrische Multiplikation .....	165
3.2.3.3	Multiplikation unter Einschluss physikalischer Faktoren .....	165
3.2.3.4	Umformungsverfahren .....	166
3.2.3.5	Grundlegende Aspekte .....	168
3.3	Konsistenzeigenschaft .....	169
3.4	Weitergehende Konsistenzphänomene .....	171
3.4.1	Zeitliche Invarianz .....	171
3.4.2	Personelle Invarianz .....	172
3.4.3	Transfinite Objektbereiche .....	173
3.4.4	Zum Begriff des „Rechenverfahrens“ .....	174
3.5	Erklärungen der Konsistenzphänomene .....	176
3.5.1	Segmentierung (Homomorphie) .....	176
3.5.1.1	Schriftliche Multiplikation und Umformungsverfahren .....	177
3.5.1.2	Geometrische und physikalische Multiplikation .....	183
3.5.2	Semantische Priorisierung .....	188
3.5.2.1	Empirie des Anzahlbegriffs .....	189
3.5.2.2	Elementares Diagramm als empirische Struktur .....	192
3.5.2.3	Empirische Zahlgesetze .....	199

3.5.2.4	Inhaltliche Interpretation von Termumformungen.....	204
3.5.3	Methodologische Bemerkungen .....	210
3.5.4	Deduzierte Regularität.....	213
3.5.5	Anhang: Algebraisierung des schriftlichen Multiplikationsverfahrens.....	215
3.6	Weiterführende Betrachtungen .....	220
3.6.1	Erklärungen im Rahmen grundlegender Adaptionsmodelle.....	220
3.6.2	„Fehler“ im Rahmen einer empirischen Konsistenztheorie .....	221
3.6.3	Konsistenzanalyse im Bereich komplexerer Theorien.....	224
3.6.3.1	Grundlegende Aspekte .....	224
3.6.3.2	Operationaler Charakter .....	227
3.6.3.3	Externalisierung.....	228
3.6.3.4	Wissensstrukturen.....	228
3.6.3.5	Kognitive Module.....	229
3.6.3.6	Prädikatenlogische Typisierbarkeit .....	230
3.6.3.7	Methodologische Konsequenzen.....	231
	LITERATURHINWEISE .....	235