

Inhaltsverzeichnis

1 PERSPEKTIVEN EINER EMPIRISTISCHEN GRUNDLEGUNG	
MATHEMATISCHER THEORIEN	1
1.1 Einleitung.....	1
1.2 Methodologische Prinzipien der Formulierung einer verhaltensorientierten Metatheorie	4
1.3 Empirische Theorie natürlicher Zahlen: Zahlen als Schriftzeichen.....	9
1.3.1 Empirische Objektbereiche und Strukturformate	9
1.3.1.1 Grundlegende Definitionen	9
1.3.1.2 Repräsentation von Strukturmerkmalen	12
1.3.2 Paradigmatische Verhaltensbeschreibungen.....	14
1.3.3 Modellbildung als Mittel metatheoretischer Analyse	17
1.3.3.1 Strukturmodell.....	18
1.3.3.2 Sprachmodell.....	21
1.3.3.3 Gültigkeitsrelation	24
1.3.4 Zahlen als Abstraktionen.....	30
1.3.4.1 Strukturelle Modellierung.....	31
1.3.4.2 Sprachliche Modellierung.....	33
1.3.5 Revision des modelltheoretischen Ansatzes: Empiriegehalt mathematischer Modelle	42
1.3.5.1 Konzeptuelle Niveaus: Formelgraphische Realisierungen metatheoretischer Terme	42
1.3.5.2 Sprechweisen und Beschreibungssysteme.....	52
1.3.5.3 Empirische Semantik als metatheoretische Analogie	56
1.3.5.4 Spezialfall: Validierung von Modellen.....	62
1.3.5.5 Wahrheitspersistenz unter metatheoretisch variablen Bedingungen.....	64
1.3.5.6 Methodologische Bemerkungen.....	73

1.4	Weitere Beispiele empirischer Interpretationen.....	75
1.4.1	Natürliche Zahlen als Punktmuster.....	76
1.4.2	Empirische Verknüpfungsgebilde	81
1.4.3	Empirische Logik	83
1.4.4	Empirische Geometrie	85
1.5	Zusammenfassung und Ausblick	87
1.6	Anhang: Prädikatenlogische Formalisierungen von Objekttheorien	89
1.6.1	Theorie der Verknüpfungsgebilde	90
1.6.2	Theorie prädikatenlogischer Formeln.....	94
2	ZUR HERLEITUNG ALGEBRAISCHER IDENTITÄTEN AUS GEOMETRISCHEN PRINZIPIEN – METHODOLOGISCHE ANALYSE EINES FALLBEISPIELS	99
2.1	Einleitung.....	99
2.2	Empirische reelle Zahlen	102
2.3	Empirische Geometrie	105
2.4	Präzisierung eines Beweises	109
2.5	Kognitive Strategien und ihre wissenschaftstheoretische Bewertung.....	112
2.6	Formaler Ansatz.....	116
2.7	Zusammenfassung	120
3	MATHEMATISCHE KONSISTENZANALYSE IM SPIEGEL EMPIRISCHER METHODOLOGIEN	123
3.1	Einleitung.....	123
3.2	Operative Semantik eines arithmetischen Aufgabenformats	127
3.2.1	Semantik arithmetischer Fragestellungen.....	127
3.2.2	Lösungsverfahren	129
3.2.2.1	Schriftliche Multiplikation	130

3.2.2.2	Geometrische Multiplikation.....	131
3.2.2.3	Multiplikation unter Einschluss physikalischer Faktoren.....	132
3.2.2.4	Umformungsverfahren: Motivation und Theorie.....	132
3.2.2.5	Umformungsverfahren: Praktische Anwendung	157
3.2.3	Methodologische Aspekte	163
3.2.3.1	Schriftliche Multiplikation	163
3.2.3.2	Geometrische Multiplikation.....	165
3.2.3.3	Multiplikation unter Einschluss physikalischer Faktoren.....	165
3.2.3.4	Umformungsverfahren	166
3.2.3.5	Grundlegende Aspekte	168
3.3	Konsistenz Eigenschaft	169
3.4	Weitergehende Konsistenzphänomene	171
3.4.1	Zeitliche Invarianz.....	171
3.4.2	Personelle Invarianz	172
3.4.3	Transfinite Objektbereiche	173
3.4.4	Zum Begriff des „Rechenverfahrens“.....	174
3.5	Erklärungen der Konsistenzphänomene.....	176
3.5.1	Segmentierung (Homomorphie)	176
3.5.1.1	Schriftliche Multiplikation und Umformungsverfahren	177
3.5.1.2	Geometrische und physikalische Multiplikation.....	183
3.5.2	Semantische Priorisierung	188
3.5.2.1	Empirie des Anzahlbegriffs.....	189
3.5.2.2	Elementares Diagramm als empirische Struktur.....	192
3.5.2.3	Empirische Zahlgesetze.....	199

3.5.2.4	Inhaltliche Interpretation von Termumformungen.....	204
3.5.3	Methodologische Bemerkungen	210
3.5.4	Deduzierte Regularität.....	213
3.5.5	Anhang: Algebraisierung des schriftlichen Multiplikationsverfahrens.....	215
3.6	Weiterführende Betrachtungen	220
3.6.1	Erklärungen im Rahmen grundlegender Adaptionsmodelle.....	220
3.6.2	„Fehler“ im Rahmen einer empirischen Konsistenztheorie	221
3.6.3	Konsistenzanalyse im Bereich komplexerer Theorien.....	224
3.6.3.1	Grundlegende Aspekte	224
3.6.3.2	Operationaler Charakter	227
3.6.3.3	Externalisierung.....	228
3.6.3.4	Wissensstrukturen.....	228
3.6.3.5	Kognitive Module.....	229
3.6.3.6	Prädikatenlogische Typisierbarkeit	230
3.6.3.7	Methodologische Konsequenzen.....	231
	LITERATURHINWEISE	235