

Inhalt

1	Natürliche Zahlen	9
1.1	Primzahlen	9
1.1.1	Ein Zahlzerlegungsspiel – wer zerlegt zuletzt?	9
1.1.2	Das Sieb des Eratosthenes	14
1.1.3	Unendlichkeit der Primzahlen, Primzahllücken	21
1.1.4	Primzahlformeln	25
1.1.5	Besondere Primzahlen	27
	Fermatzahlen	27
	Mersennezahlen	28
	Exkurs: Vollkommene Zahlen	29
	Offene Probleme	30
1.1.6	Zur Charakteristik der Primzahlen	32
1.2	Teilbarkeitsregeln	36
1.3	Anzahl der Teiler	39
1.4	ggT und kgV	44
1.4.1	Der größte gemeinsame Teiler (ggT)	44
	Exkurs: Die Wechselwegnahme und der ggT	46
1.4.2	Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)	49
1.4.3	Zusammenhang von ggT und kgV	51
2	Rationale Zahlen	53
2.1	Die Stammbrüche	53
2.2	Reinperiodische Dezimalbruchentwicklung	54
2.2.1	Maximale Länge der Periode	54
2.2.2	Nenner und Periodenlänge	57
2.2.3	Zyklen und Periodenlänge	61
2.2.4	Feinstruktur der Periodenziffernabfolge	64
	2.2.4.1 Geradzahlige Periodenlänge	67
	2.2.4.2 Ungeradzahlige Periodenlänge	70
2.2.5	Weitere Eigenschaften der Periodenziffernabfolge	72

2.2.6	Ausblick auf die reinperiodische Dezimalbruchentwicklung mit zusammengesetzten Nennern	76
2.2.7	Umwandlung von reinperiodischen Dezimalbrüchen in Brüche	78
2.2.8	Nebenbemerkung: Die Siebtel und die geometrische Reihe	82
2.3	Endliche Dezimalbrüche	84
2.4	Gemischtperiodische Dezimalbrüche	86
2.4.1	Struktureigenschaften gemischtperiodischer Dezimalbrüche	86
2.4.2	Umwandlung gemischtperiodischer Dezimalbrüche in Brüche	87
2.5	Anhang Periodenlängen und Perioden von Primzahlen . .	89
3	Irrationale Zahlen	91
3.1	Die Quadratzahlentabelle	91
3.2	Quadratwurzeln	96
3.2.1	Das Ziehen von Quadratwurzeln in der achten Jahrgangsstufe	96
3.2.2	Das Ziehen von Quadratwurzeln mithilfe von Kettenbrüchen	99
3.2.2.1	Beweis der Konvergenz	108
3.2.2.2	Zwischenfazit	108
3.2.3	Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$	110
3.2.4	Exkurs: $\sqrt{2}$ in der Musik	112
3.2.5	Wurzelrechnung	114
3.2.6	Die Irrationalität in der Geometrie	119
3.2.7	Alternativen	127
3.2.7.1	Alternative Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$	127
3.2.7.2	Alternative Näherungsverfahren für Quadratwurzeln	128
3.3	Ausblick: Der Goldene Schnitt	136
3.3.1	Die Fibonacci-Zahlen	136
3.3.2	Der Goldene Schnitt als Kettenbruch	138
3.3.3	Zusammenhänge von Φ und ϕ	141
3.3.4	Konstruktion des Goldenen Schnittes	144
3.3.5	Der Goldene Schnitt im Pentagramm	147

3.3.6	Die exakte Zahl für Φ und ϕ	150
3.3.7	Fibonacci-Zahlen und das Pascalsche Zahlendreieck	151
4	Zum Unterricht	155
4.1	Allgemeines	155
4.2	Übersicht einer möglichen Epoche	157
5	Lösungen der Aufgaben	165
	Literaturverzeichnis	195