

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Historische Notizen</b>	<b>1</b>
1.1 Wahrheit und Beweisbarkeit . . . . .	1
1.2 Der Weg zur modernen Mathematik . . . . .	7
1.2.1 Rätsel des Kontinuums . . . . .	7
1.2.2 Auf den Spuren der Unendlichkeit . . . . .	13
1.2.3 Macht der Symbole . . . . .	27
1.2.4 Aufbruch in ein neues Jahrhundert . . . . .	31
1.2.5 Grundlagenkrise . . . . .	36
1.2.6 Axiomatische Mengenlehre . . . . .	42
1.2.7 Hilberts Programm und Gödels Beitrag . . . . .	44
1.2.8 Grenzen der Berechenbarkeit . . . . .	53
1.2.9 Auferstanden aus Ruinen . . . . .	61
1.3 Übungsaufgaben . . . . .	67
<b>2 Formale Systeme</b>	<b>71</b>
2.1 Definition und Eigenschaften . . . . .	71
2.2 Entscheidungsverfahren . . . . .	83
2.3 Aussagenlogik . . . . .	87
2.3.1 Syntax und Semantik . . . . .	87
2.3.2 Aussagenlogischer Kalkül . . . . .	93
2.4 Prädikatenlogik erster Stufe . . . . .	102
2.4.1 Syntax und Semantik . . . . .	103
2.4.2 Prädikatenlogischer Kalkül . . . . .	108
2.5 Prädikatenlogik mit Gleichheit . . . . .	111
2.6 Prädikatenlogik höherer Stufe . . . . .	116
2.6.1 Syntax und Semantik . . . . .	116
2.6.2 Henkin-Interpretation . . . . .	120
2.7 Übungsaufgaben . . . . .	123
<b>3 Fundamente der Mathematik</b>	<b>131</b>
3.1 Peano-Arithmetik . . . . .	132
3.1.1 Syntax . . . . .	132
3.1.2 Semantik . . . . .	133
3.1.3 Axiome und Schlussregeln . . . . .	137

3.2	Axiomatische Mengenlehre . . . . .	145
3.2.1	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre . . . . .	147
3.2.1.1	ZF-Axiome . . . . .	148
3.2.1.2	Das Auswahlaxiom . . . . .	156
3.2.1.3	Mengenlehre als Fundament der Mathematik . . . . .	162
3.2.1.4	Einbettung der natürlichen Zahlen . . . . .	170
3.2.2	Ordinalzahlen . . . . .	172
3.2.2.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	172
3.2.2.2	Der Unendlichkeit entgegen . . . . .	177
3.2.2.3	Ordnungstypen und Wohlordnungen . . . . .	184
3.2.2.4	Transfinite Induktion . . . . .	187
3.2.3	Kardinalzahlen . . . . .	190
3.3	Übungsaufgaben . . . . .	192
<b>4</b>	<b>Beweistheorie</b>	<b>197</b>
4.1	Gödel'sche Unvollständigkeitssätze . . . . .	197
4.2	Der erste Unvollständigkeitssatz . . . . .	198
4.2.1	Arithmetisierung der Syntax . . . . .	202
4.2.2	Primitiv-rekursive Funktionen . . . . .	207
4.2.3	Arithmetische Repräsentierbarkeit . . . . .	209
4.2.4	Gödels Diagonalargument . . . . .	215
4.2.5	Rossers Beitrag . . . . .	220
4.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz . . . . .	223
4.4	Gödels Sätze richtig verstehen . . . . .	228
4.5	Der Satz von Goodstein . . . . .	233
4.6	Übungsaufgaben . . . . .	240
<b>5</b>	<b>Berechenbarkeitstheorie</b>	<b>243</b>
5.1	Berechnungsmodelle . . . . .	244
5.1.1	Turing-Maschinen . . . . .	244
5.1.1.1	Erweiterungen des Basismodells . . . . .	248
5.1.1.2	Alternative Beschreibungsformen . . . . .	250
5.1.1.3	Universelle Turing-Maschine . . . . .	253
5.1.2	Registermaschinen . . . . .	258
5.2	Die Church'sche These . . . . .	261
5.3	Grenzen der Berechenbarkeit . . . . .	268
5.3.1	Das Halteproblem . . . . .	268
5.3.2	Der Satz von Rice . . . . .	271
5.4	Folgen für die Mathematik . . . . .	273
5.4.1	Unentscheidbarkeit der PL1 . . . . .	274
5.4.2	Unvollständigkeit der Arithmetik . . . . .	281
5.4.3	Hilberts zehntes Problem . . . . .	289

5.4.3.1	Diophantische Repräsentierbarkeit . . . . .	292
5.4.3.2	Codierung von Registermaschinen . . . . .	294
5.5	Übungsaufgaben . . . . .	305
<b>6</b>	<b>Algorithmische Informationstheorie</b>	<b>313</b>
6.1	Algorithmische Komplexität . . . . .	314
6.2	Die Chaitin'sche Konstante . . . . .	322
6.3	Unvollständigkeit formaler Systeme . . . . .	332
6.4	Übungsaufgaben . . . . .	335
<b>7</b>	<b>Modelltheorie</b>	<b>339</b>
7.1	Meta-Resultate zur Prädikatenlogik . . . . .	340
7.1.1	Modellexistenzsatz . . . . .	343
7.1.2	Kompaktheitssatz . . . . .	345
7.1.3	Satz von Löwenheim-Skolem . . . . .	349
7.2	Nichtstandardmodelle von PA . . . . .	352
7.2.1	Abzählbare Nichtstandardmodelle . . . . .	353
7.2.2	Überabzählbare Nichtstandardmodelle . . . . .	356
7.3	Das Skolem-Paradoxon . . . . .	363
7.4	Boolesche Modelle . . . . .	370
7.4.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	371
7.4.2	Ein einfacher Unabhängigkeitsbeweis . . . . .	376
7.5	Übungsaufgaben . . . . .	383
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>391</b>
<b>Namensverzeichnis</b>		<b>399</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>		<b>403</b>