



Inhaltsverzeichnis

1	Historische Notizen	1
1.1	Wahrheit und Beweisbarkeit	1
1.2	Der Weg zur modernen Mathematik	7
1.2.1	Rätsel des Kontinuums	7
1.2.2	Auf den Spuren der Unendlichkeit	13
1.2.3	Macht der Symbole	27
1.2.4	Aufbruch in ein neues Jahrhundert	31
1.2.5	Grundlagenkrise	36
1.2.6	Axiomatische Mengenlehre	42
1.2.7	Hilberts Programm und Gödels Beitrag	44
1.2.8	Grenzen der Berechenbarkeit	53
1.2.9	Auferstanden aus Ruinen	61
1.3	Übungsaufgaben	67
2	Formale Systeme	71
2.1	Definition und Eigenschaften	71
2.2	Entscheidungsverfahren	83
2.3	Aussagenlogik	87
2.3.1	Syntax und Semantik	87
2.3.2	Aussagenlogischer Kalkül	93
2.4	Prädikatenlogik erster Stufe	102
2.4.1	Syntax und Semantik	103
2.4.2	Prädikatenlogischer Kalkül	108
2.5	Prädikatenlogik mit Gleichheit	111
2.6	Prädikatenlogik höherer Stufe	116
2.6.1	Syntax und Semantik	116
2.6.2	Henkin-Interpretation	120
2.7	Übungsaufgaben	123
3	Fundamente der Mathematik	131
3.1	Peano-Arithmetik	132
3.1.1	Syntax	132
3.1.2	Semantik	133
3.1.3	Axiome und Schlussregeln	137

3.2	Axiomatische Mengenlehre	145
3.2.1	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre	147
3.2.1.1	ZF-Axiome	148
3.2.1.2	Das Auswahlaxiom	156
3.2.1.3	Mengenlehre als Fundament der Mathematik	162
3.2.1.4	Einbettung der natürlichen Zahlen	170
3.2.2	Ordinalzahlen	172
3.2.2.1	Definition und Eigenschaften	172
3.2.2.2	Der Unendlichkeit entgegen	177
3.2.2.3	Ordnungstypen und Wohlordnungen	184
3.2.2.4	Transfinite Induktion	187
3.2.3	Kardinalzahlen	190
3.3	Übungsaufgaben	192
4	Beweistheorie	197
4.1	Gödel'sche Unvollständigkeitssätze	197
4.2	Der erste Unvollständigkeitssatz	198
4.2.1	Arithmetisierung der Syntax	202
4.2.2	Primitiv-rekursive Funktionen	207
4.2.3	Arithmetische Repräsentierbarkeit	209
4.2.4	Gödels Diagonalargument	215
4.2.5	Rossers Beitrag	220
4.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz	223
4.4	Gödels Sätze richtig verstehen	228
4.5	Der Satz von Goodstein	233
4.6	Übungsaufgaben	240
5	Berechenbarkeitstheorie	243
5.1	Berechnungsmodelle	244
5.1.1	Turing-Maschinen	244
5.1.1.1	Erweiterungen des Basismodells	248
5.1.1.2	Alternative Beschreibungsformen	250
5.1.1.3	Universelle Turing-Maschine	253
5.1.2	Registermaschinen	258
5.2	Die Church'sche These	261
5.3	Grenzen der Berechenbarkeit	268
5.3.1	Das Halteproblem	268
5.3.2	Der Satz von Rice	271
5.4	Folgen für die Mathematik	273
5.4.1	Unentscheidbarkeit der PL1	274
5.4.2	Unvollständigkeit der Arithmetik	281
5.4.3	Hilberts zehntes Problem	289

5.4.3.1	Diophantische Repräsentierbarkeit	292
5.4.3.2	Codierung von Registermaschinen	294
5.5	Übungsaufgaben	305
6	Algorithmische Informationstheorie	313
6.1	Algorithmische Komplexität	314
6.2	Die Chaitin'sche Konstante	322
6.3	Unvollständigkeit formaler Systeme	332
6.4	Übungsaufgaben	335
7	Modelltheorie	339
7.1	Meta-Resultate zur Prädikatenlogik	340
7.1.1	Modellexistenzsatz	343
7.1.2	Kompaktheitssatz	345
7.1.3	Satz von Löwenheim-Skolem	349
7.2	Nichtstandardmodelle von PA	352
7.2.1	Abzählbare Nichtstandardmodelle	353
7.2.2	Überabzählbare Nichtstandardmodelle	356
7.3	Das Skolem-Paradoxon	363
7.4	Boolesche Modelle	370
7.4.1	Definition und Eigenschaften	371
7.4.2	Ein einfacher Unabhängigkeitsbeweis	376
7.5	Übungsaufgaben	383
	Literaturverzeichnis	391
	Namensverzeichnis	399
	Sachwortverzeichnis	403