

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Voraussetzungen	1
1.1	Ziele	1
1.1.1	Algebraische Strukturen	1
1.1.2	Polynomgleichungen in einer Variablen	3
1.2	Voraussetzungen	7
2	Körpererweiterungen und algebraische Elemente	9
2.1	Körpererweiterungen	9
2.2	Zwischenkörper und algebraische Elemente	17
3	Gruppen	39
3.1	Allgemeine Definition und Folgerungen	40
3.2	Untergruppen und Gruppenhomomorphismen	47
4	Gruppenquotienten und Normalteiler	59
4.1	Äquivalenzrelationen	59
4.2	Gruppenquotienten	67
4.3	Der Satz von Lagrange	70
4.4	Normalteiler und Faktorgruppen	71
4.5	Der Homomorphiesatz für Gruppen	78
4.6	Endliche zyklische Gruppen	80
5	Ringe und Ideale	85
5.1	Kommutative Ringe mit Eins	85
5.2	Ringhomomorphismen	88
5.3	Einheiten und Nullteiler	89
5.4	Ideale, Faktoringe und der Homomorphiesatz	94
5.5	Primideale und maximale Ideale	102
5.6	Der chinesische Restsatz	106
5.7	Beispiele von Ringen in quadratischen Zahlkörpern	110
6	Euklidische Ringe, Hauptidealringe, Noethersche Ringe	117
6.1	Euklidische Ringe	117
6.2	Der euklidische Algorithmus	121
6.3	Noethersche Ringe	123

7	Faktorielle Ringe	127
7.1	Primelemente und irreduzible Elemente, faktorielle Ringe	127
7.2	Eigenschaften	131
8	Quotientenkörper für Integritätsbereiche	137
9	Irreduzible Polynome in faktoriellen Ringen	141
9.1	Inhalt von Polynomen	141
9.2	Reduktion modulo Primelement	143
9.3	Das Gauß Lemma	145
9.4	Anwendung der Reduktion mod p	149
10	Galoistheorie (I) – Satz A und seine Variante A'	159
10.1	Die wundersame Körperschaffung	159
10.2	Der Zerfällungskörper	163
10.3	Der Satz A und A'	170
10.4	Anwendung im Körperturm	176
10.5	Die Galoisgruppe	179
11	Intermezzo – explizites Beispiel $X^5 - 777X + 7$	189
12	Normale Körpererweiterungen	197
12.1	Algebraischer Abschluss	197
12.2	Fortsetzung von Körperhomomorphismen	198
12.3	Normale Erweiterungen	200
13	Separabilität	207
13.1	Motivation und Definition	207
13.2	Formale Ableitung	209
13.3	Charakteristik eines Körpers und Separabilität	215
13.4	Der Separabilitätsgrad	218
13.5	Der Satz vom primitiven Element	223
14	Galoistheorie (II) – der Hauptsatz	229
14.1	Der Hauptsatz – Statement	229
14.2	Ausblick auf eine Anwendung – Mitternachtsformel für alle Grade?	230
14.3	Beweis des Hauptsatzes	237
14.4	Beweis des Zusatzes	242
15	Kreisteilungskörper	245
15.1	Einheitswurzeln	245
15.2	Kreisteilungskörper und -polynome	251
16	Endliche Körper	265
16.1	Primkörper, endliche Körper und der Frobenius	265
16.2	Endliche Körper	267

17 Mehr Gruppentheorie – Gruppenoperationen und Sylow	281
17.1 Gruppenoperationen	281
17.2 Die Sylowsätze	290
17.3 Anwendungen der Sylowsätze und übliche Tricks	292
17.4 Beweis der Sylowsätze	293
18 Auflösbarkeit von Polynomgleichungen	303
18.1 Auflösbare Gruppen	303
18.2 Auflösung von Polynomgleichungen durch Radikale	306
18.3 Die allgemeine Gleichung n -ten Grades	310
A Beweis der Existenz eines algebraischen Abschlusses	319
B Tricks und Methoden, um Gruppen einer vorgegebenen Ordnung zu klassifizieren	325
Stichwortverzeichnis	345