

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben, Probleme und systematisches Problemlösen	1
1.1	Aufgabe und Problem	1
1.1.1	Aufgabe oder Problem?	3
1.1.2	Problemschwierigkeit	4
1.2	Routineaufgabe und Problemaufgabe	6
1.2.1	Merkmale	6
1.2.2	Von der Aufgabe zum Problem	10
1.2.2.1	Öffnen durch Weglassen	11
1.2.2.2	Öffnen durch Formulieren einer Umkehraufgabe	12
1.2.2.3	Öffnen durch Fehlersuche	13
1.3	Systematisches Problemlösen	14
1.3.1	Problemlösen	14
1.3.2	Heurismen	16
1.3.3	Heuristik	16
1.4	Kurze Geschichte der Heuristik	17
1.4.1	Heuristische Strategien in Frühgeschichte und Antike	17
1.4.1.1	Antiphon	18
1.4.1.2	Heuristische Vorgehensweise nach Platon	19
1.4.1.3	Methodenlehre des Archimedes	20
1.4.1.4	Das Pappos-Prinzip	20
1.4.1.5	Erster produktiver Einsatz heuristischer Verfahren nach Proklos	20
1.4.2	Stagnation im Mittelalter	21
1.4.3	Wiederentdeckung in der Renaissance und der frühen Neuzeit	21
1.4.3.1	René Descartes' Methode zur Problemlösung	21
1.4.3.2	Bonaventura Cavalieri	22
1.4.3.3	Joachim Jungius	22
1.4.3.4	Michael Gottlieb Hansch	23
1.4.4	Das 20. Jahrhundert: Direkte Vorläufer	23
1.4.4.1	George Pólya	23
1.4.4.2	Martin Glatfeld	24

1.4.4.3	Alan H. Schoenfeld	24
1.4.4.4	Heinrich Winter	25
1.4.5	Das 21. Jahrhundert: Aktuelle Ansätze	26
1.4.5.1	Wolfgang Schwarz	29
1.4.5.2	Regina Bruder und Christina Collet	31
1.5	Kommentar	32
Literatur		34
2	Problemlösen in der Bildungsgeschichte –	
	Teil 1: Problemlösen und die Genese der Geometrie	37
2.1	Prähistorische Indizien	39
2.2	Alt- und frühhistorische Zeugnisse	48
2.2.1	Die Geometrie der Babylonier	51
2.2.1.1	Polygone	54
2.2.1.2	Dreiecke und Ähnlichkeit	60
2.2.1.3	Pythagoreischer Lehrsatz und Quadratwurzeln	64
2.2.1.4	Berechnungen am Kreis	66
2.2.1.5	Volumenberechnungen	68
2.2.2	Geometrie der Ägypter	70
2.2.2.1	Rechtecke	72
2.2.2.2	Dreiecke und Ähnlichkeit	74
2.2.2.3	Trapeze	77
2.2.2.4	Berechnungen am Kreis	79
2.2.2.5	Volumenberechnungen	80
2.2.3	Synopse: Geometrie der frühen Hochkulturen und systematisches Problemlösen	84
2.3	Griechisch-römische Mathematik	89
2.3.1	Geometrie der Griechen	93
2.3.1.1	Pyramidenhöhe	96
2.3.1.2	Entfernungsbestimmung	97
2.3.1.3	Die geometrische Arithmetik	98
2.3.1.4	Inkommensurabilität	98
2.3.1.5	Quadratur von Polygonen	99
2.3.2	Synopse: Geometrie der Griechen und systematisches Problemlösen	102
2.4	Symbiose: Geometrie und systematisches Problemlösen	103
Literatur		105
3	Eine kurze Geschichte des Problemlösens in der Bildungsgeschichte –	
	Teil 2: Problemlösen und Mathematikunterricht	109
3.1	Das Mittelalter	110
3.2	Renaissance, frühe Neuzeit und Vormoderne	116

3.3	Die Sattelzeit	119
3.4	Das spätere 19. Jahrhundert	124
3.5	Das frühe 20. Jahrhundert	127
3.6	Exkurs: Lernpsychologie und Didaktik	128
3.6.1	Anfänge: Introspektion/Selbstanalyse	129
3.6.2	Konzeptionen: Behaviorismus	130
3.6.3	Modelle: Jean Piaget	130
3.6.4	Modelle: Hans Aebli's operative Methode	131
3.6.5	Modelle: Darstellungsebenen nach Jerome Bruner	132
3.6.6	Konzeptionen: Kognitivismus	133
3.6.7	Konzeptionen: Konstruktivismus	133
3.6.8	Modelle: Lew Wygotski und der Sozialkonstruktivismus	134
3.6.9	Kritisch-konstruktive Didaktik: Wolfgang Klafki	134
3.6.10	(Interaktionistisch-)Konstruktivistische Didaktik: Kersten Reich	135
3.7	Diskussion: Das Paradoxon der Fächergrenzen	136
3.7.1	Gefächerter und ungefächerter Unterricht	136
3.7.2	Nicht-fachgebundener Unterricht	137
3.7.3	Transcurricularer Unterricht	140
3.7.4	Konträre Positionen	141
3.7.4.1	Fachunterricht – was sonst?	141
3.7.4.2	Konträre Positionen: Nicht-fachgebundener Unterricht – was soll das?	143
3.7.5	Historische Konzepte nicht-fachgebundenen Unterrichts	143
3.7.5.1	Berthold Ottos Gesamtunterricht	144
3.7.5.2	Der (gebundene) Gesamtunterricht des Leipziger Lehrervereins	144
3.7.5.3	John Deweys Erziehungskonzeption	146
3.7.5.4	Der mehrperspektivische Unterricht	148
3.7.6	Aktuelle Konzepte nicht-fachgebundenen Unterrichts	150
3.7.6.1	Funktionen	151
3.7.6.2	Gefahren	152
3.7.6.3	Idee von Schule und Unterricht	153
3.7.6.4	Legitimationsdimensionen	153
3.7.6.5	Interpersonelle Aspekte	157
3.7.6.6	Intentionale Aspekte	158
3.7.6.7	Inhaltliche Aspekte: Realität vs. Schulfächer?	159
3.7.6.8	Empirische Befunde – funktioniert das?	161
3.7.7	Kommentar	162
3.8	Das spätere 20. Jahrhundert: Die Neuentdeckung des Problems	164
3.9	Exkurs: Unterrichtskonzepte des 20. Jahrhunderts	167
3.9.1	Handlungsorientierter Unterricht	168
3.9.2	Genetischer Unterricht	168

3.9.3	Entdeckendes und forschendes Lernen	169
3.9.4	Problemorientierter Mathematikunterricht	169
3.9.5	Realistic Mathematics Education	170
3.9.6	Situated Learning	171
3.9.7	Kommentar	171
3.10	Fazit und Kommentar	172
	Literatur	175
4	Die jüngere deutsche Bildungsreform	179
4.1	Der Weg zu den Bildungsstandards	179
4.1.1	TIMSS 1995 und das Programm der Bund-Länder-Kommission	181
4.1.2	Die PISA-Studien ab 2000	182
4.1.3	Die jüngsten PISA-Studien bis 2018	184
4.1.4	Die Bildungsstandards	186
4.2	Die Umsetzung in den deutschen Lehrplänen	188
4.2.1	Vorbemerkungen	188
4.2.2	Analyse der Lehrplanschriften	197
4.2.2.1	Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts	197
4.2.2.2	Allgemeine Aussagen zum Problemlösen	200
4.2.3	Zur Verknüpfung mit den Teilgebieten	209
4.3	Fazit und Kommentar	212
	Literatur	215
5	Neue Wege: Heuristik	217
5.1	Problemlösen – nur eine Kompetenz unter vielen?	217
5.2	Aktuelle Ideen und ihre Grenzen	220
5.2.1	Problemlösen lernen im Mathematikunterricht – Studie zum Wirkprinzip heuristischer Bildung	221
5.2.2	„Wer sucht, der findet“ – oder nicht? Aufgaben zum Erwerb der Problemlösekompetenz	223
5.3	Heuristik und Terminologie (Krichel und Stiller)	223
5.3.1	Kategorie I: Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung	226
5.3.1.1	Anfertigen einer Tabelle	227
5.3.1.2	Erstellen grafischer Repräsentationsformen	228
5.3.1.3	Gleichungen aufstellen	231
5.3.1.4	De- und Rekonstruktion	233
5.3.2	Kategorie II: Heurismen der Analyse und Adaption	236
5.3.2.1	Heurismus der Affinität	237
5.3.2.2	Heurismus der Strukturnutzung	239
5.3.3	Kategorie III: Heurismen der konkreten Handlung	244
5.3.3.1	Systematisches Probieren	244

5.3.3.2	Vorwärtsarbeiten	247
5.3.3.3	Rückwärtsarbeiten	248
5.4	Zusammenfassung	249
	Literatur	251
6	Integrierte Heuristiklehre im Mathematikunterricht – das IHiMU-Konzept	253
6.1	IHiMU-Steckbrief	254
6.2	Konzeptbausteine	255
6.2.1	Forscheraufgaben als Kern der IHiMU	256
6.2.2	Forscherheft	257
6.2.3	Methodik und Lernarrangements der IHiMU	260
6.2.3.1	Placemat-Verfahren	262
6.2.3.2	Das Drei-Schritt-Interview	262
6.2.3.3	Gruppenpuzzle	263
6.2.4	Intelligentes Üben	263
6.2.5	Sicherung der Ergebnisse	264
6.2.6	Problemlösebox und Merksatzbox	265
6.3	Das IHiMU-Konzept konkret	266
6.3.1	Begriffsbildung und Grundkonstruktionen	268
6.3.1.1	Geometrische Inhalte	268
6.3.1.2	Darstellung in Schulbüchern	271
6.3.1.3	Heuristische Analyse	271
6.3.1.4	IHiMU-Arrangement	272
6.3.2	Symmetriebegriff	277
6.3.2.1	Geometrische Inhalte	277
6.3.2.2	Heuristische Analyse	281
6.3.2.3	IHiMU-Arrangement	282
6.3.3	Ebene Figuren – Schwerpunkt Vierecke	290
6.3.3.1	Geometrische Inhalte	290
6.3.3.2	Heuristische Analyse	296
6.3.3.3	IHiMU-Arrangement	297
6.3.3.4	Ausblick: Dreiecke	305
6.3.3.5	Ausblick: Körper	306
6.3.4	Flächeninhaltsberechnung von Vierecken	307
6.3.4.1	Geometrische Inhalte	307
6.3.4.2	Heuristische Analyse	312
6.3.4.3	IHiMU-Arrangement	315
6.3.4.4	Ausblick: Rauminhalte	326
6.4	Kommentar	327
	Literatur	328

7	Content and Heuristics Integrated Mathematics Education – das CHIME-Konzept	331
7.1	Konzeptdimensionen und -dimensionierung	331
7.1.1	Legitimatorisches	333
7.1.1.1	Problemlösen und Heuristik sind Kern allen Mathematikunterrichts	334
7.1.1.2	Problemlösen und Heuristik sind nicht fachgebunden	337
7.1.2	Transcurricularität – das Missing Link	340
7.1.2.1	Transcurriculare Module als Alternative zur Unterrichtseinheit	343
7.1.2.2	Grad der Integration	344
7.1.3	Personen	346
7.1.3.1	Lernerautonomie	346
7.1.3.2	Lehrerprofessionalität	347
7.2	Allgemeines Strukturmodell CHIME	348
7.2.1	Konzeptbeschreibung	349
7.2.2	Ziele und Indikatoren	352
7.2.3	Heuristische Module und Sequenzen	354
7.2.4	Beteiligte Fachgebiete und ihre Themenfelder – eine Auswahl	355
7.2.4.1	Gesellschaftslehre: Erdkunde, Geschichte und Politik in der Orientierungsstufe	356
7.2.4.2	Naturwissenschaften: Physik, Biologie, Chemie in der Orientierungsstufe	358
7.2.4.3	Bildende Kunst in der Orientierungsstufe	360
7.2.4.4	Sport in der Orientierungsstufe	361
7.2.4.5	Wahlpflichtfächer: Technik, Werken, Wirtschaft, Verwaltung etc. in der Orientierungsstufe	362
7.3	Didaktisch-methodische Konzeption	363
7.3.1	Mathematik im Modul und als Unterrichtsfach	363
7.3.1.1	Vollintegration Stufe III	363
7.3.1.2	Integrationsstufe II	365
7.3.1.3	Integrationsstufe I	367
7.3.2	Mathematik als Wahlpflichtfach	369
7.3.3	Strukturierung eines transcurricularen Unterrichts: Lehrer	369
7.3.3.1	Planungsanforderungen	370
7.3.3.2	Methodische Gestaltung	373
7.3.4	Strukturierung eines transcurricularen Unterrichts: Schüler	373
7.3.4.1	Die Methodenbox als individuelles Strukturierungsinstrument	374
7.3.4.2	Das Forscherheft als Mittler zwischen Individuum, Kleingruppe und Lerngruppe	374

7.3.4.3	Das Problemlösenetz als kommunes Strukturierungsinstrument	374
7.4	Konkretisierung: CHIME für die Geometrie in der Orientierungsstufe . .	376
7.4.1	Heuristische Techniken: Grafische Repräsentationsformen, Tabellen und Gleichungen	377
7.4.1.1	Gesellschaftslehre	378
7.4.1.2	Kunst und Textiles Gestalten	383
7.4.1.3	Technik und Werken	390
7.4.1.4	Naturwissenschaften	392
7.4.1.5	Sport	396
7.4.1.6	Andere Fächer	400
7.4.2	Heuristische Technik: De- und Rekonstruktion	400
7.4.2.1	Gesellschaftslehre	400
7.4.2.2	Kunst und Textiles Gestalten	405
7.4.2.3	Technik und Werken	409
7.4.2.4	Naturwissenschaften	412
7.4.2.5	Sport	413
7.4.3	Heurismen der Analyse und Adaption: Heurismus der Affinität . .	414
7.4.3.1	Gesellschaftslehre	415
7.4.3.2	Kunst und Textiles Gestalten	419
7.4.3.3	Naturwissenschaften	423
7.4.3.4	Sport	426
7.4.4	Heurismen der Analyse und Adaption: Heurismus der Strukturnutzung	427
7.4.4.1	Gesellschaftslehre	427
7.4.4.2	Kunst und Textiles Gestalten	431
7.4.4.3	Naturwissenschaften	435
7.4.4.4	Sport	438
7.4.5	Heurismen der konkreten Handlung: Systematisches Probieren . .	440
7.4.5.1	Gesellschaftslehre	440
7.4.5.2	Kunst und Textiles Gestalten	441
7.4.5.3	Naturwissenschaften	443
7.4.5.4	Sport	446
7.4.6	Heurismen der konkreten Handlung: Vorwärtsarbeiten	448
7.4.7	Heurismen der konkreten Handlung: Rückwärtsarbeiten	449
7.4.7.1	Gesellschaftslehre	449
7.4.7.2	Naturwissenschaften	451
7.4.7.3	Kunst und Textiles Gestalten	453
7.5	Ausblick	454
	Literatur	456
	Stichwortverzeichnis	459