

Inhaltsverzeichnis

1	Ausgewählte mathematische Elemente	1
1.1	Elemente der Vektorrechnung und Vektoranalysis	1
1.1.1	Felder	1
1.1.2	Differentialoperatoren	3
1.1.3	Wichtige Anwendungen	9
1.2	Rechtwinklig krummlinige Koordinaten	11
1.2.1	Grundbegriffe und Bezeichnungen	11
1.2.2	Differentialoperatoren in rechtwinklig krummlinigen Koordinaten	14
1.2.3	Anwendungsbeispiele	18
1.3	Kurven-, Flächen-, Volumenintegrale	24
1.3.1	Bezeichnungen	24
1.3.2	Zusammenstellung: Kurvenintegrale	26
1.3.3	Zusammenstellung: Oberflächenintegrale	28
1.3.4	Zusammenstellung: Volumenintegral	29
1.4	Feldtheoretische Aspekte	29
1.4.1	Charakterisierung von Vektorfeldern	30
1.4.2	Globale Struktur von Vektorfelder	32
1.5	Harmonische Funktionen	32
2	Gravitationsfelder von Massenanordnungen	35
2.1	Gravitationsfeldstärke von Massenanordnungen	35
2.1.1	Gravitationsfelder im Außenraum gravitierender Massen	35
2.1.2	Gravitationsfelder im Innenraum gravitierender Massen	37
2.2	Beispiele zur Flächen- und Volumenanziehung	38
2.2.1	Gravitationsfeldstärke einer homogenen Kreisschicht	38
2.2.2	Gravitationsfeldstärke einer homogenen belegten Kugeloberfläche	41
2.2.3	Gravitationsfeldstärke einer homogenen Kugelschale	45

3	Gravitationspotentiale von Massenanordnungen	49
3.1	Raummasse und einfache Schicht	49
3.2	Dipolbelegung: Potential einer Doppelschicht.	50
3.3	Beispiele von Raum- und Schichtpotentialen	52
3.3.1	Gravitationspotential einer homogenen Kugeloberfläche	53
3.3.2	Gravitationspotential einer Kugeloberfläche mit Doppelschicht.	55
3.3.3	Gravitationspotential einer homogenen Kugelschale.	56
3.4	Eigenschaften der Schichtpotentiale und ihrer Ableitungen	58
3.4.1	Potential einer einfachen Schicht	58
3.4.2	Potential einer Doppelschicht	63
3.5	Poisson- und Laplace-Gleichung	64
3.5.1	Zweite Ableitungen eines Volumenpotentials außerhalb der Massen	64
3.5.2	Zweite Ableitungen eines Volumenpotentials innerhalb der Massen	65
3.6	Zusammenfassung	68
4	Integralsätze der Potentialtheorie	75
4.1	Der Gaußsche Integralsatz	75
4.1.1	Anschauliche Ableitung des Gaußschen Integralsatzes	75
4.1.2	Elementarer Beweis des Gaußschen Integralsatzes	77
4.1.3	Die Gaußsche Formel	79
4.2	Die Greenschen Integralformeln	80
4.2.1	Erste Greensche Integralformel	80
4.2.2	Zweite Greensche Integralformel	82
4.2.3	Dritte Greensche Integralformel	83
4.3	Anwendungen der Greenschen Integralformeln	86
4.3.1	Potential einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht	86
4.3.2	Potential einer Doppelschicht mit konstanter Belegung	87
4.3.3	Theorem von Chasles	87
4.3.4	Stokessche Konstanten eines Körpers	87
4.3.5	Massenbestimmung der Erde	90
4.3.6	Die Greenschen Funktionen	91
5	Kugelfunktionen und Anwendungen	97
5.1	Definition der Kugelfunktionen	97
5.2	Lösung der Laplace-Gleichung	97
5.3	Quellendarstellung des Gravitationspotentials	100
5.4	Entwicklung einer Funktion nach Kugelflächenfunktionen	104

5.5	Direktes und inverses Problem	107
5.5.1	Zusammenfassung	107
5.5.2	Lösung einer 1. Randwertaufgabe	109
5.6	Physikalische Interpretation der Potentialkoeffizienten	112
6	Diskussion der Kugelfunktionen	117
6.1	Legendresche Polynome	117
6.1.1	Definition der Legendreschen Polynome	117
6.1.2	Berechnung der Legendreschen Polynome	118
6.2	Zugeordnete Legendresche Funktionen	122
6.2.1	Definition der zugeordneten Legendreschen Funktionen	122
6.2.2	Berechnung der zugeordneten Legendreschen Funktionen	123
6.3	Kugelflächenfunktionen	130
6.3.1	Allgemeine Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen	130
6.3.2	Zonale, tesserale und sektorielle Kugelflächenfunktionen	131
6.3.3	Laplacesche Kugelflächenfunktionen	134
6.4	Räumliche Kugelfunktionen	135
6.4.1	Richtungsabhängigkeit der Kugelfunktionen	137
6.4.2	Räumliche Auflösung der Kugelflächenfunktionen	139
6.4.3	Radiale Abhängigkeit der Kugelfunktionen	141
7	Randwertaufgaben der Potentialtheorie	145
7.1	Allgemeine Bemerkungen zu den Randwertaufgaben	145
7.1.1	Aufgabenstellung	145
7.1.2	Einteilung der Randwertaufgaben nach dem Randwerttyp	146
7.2	Lösung der Randwertaufgaben für den Außenraum einer Kugel	148
7.2.1	Lösung der 1. Randwertaufgabe	148
7.2.2	Lösung der 2. Randwertaufgabe	152
7.2.3	Lösung der 3. Randwertaufgabe	154
7.3	Lösung der Randwertaufgaben bei allgemeinen Randflächen	160
7.3.1	Aufgabenstellung, Überblick	160
7.3.2	Erste Randwertaufgabe bei beliebigem Rand	161
7.3.3	Dritte schiefachsige Randwertaufgabe bei beliebigem Rand	162
8	Alternative Kugelfunktionsdarstellungen	163
8.1	Reelle und komplexe Darstellungen	164
8.1.1	Nicht normierte reelle Kugelflächenfunktionen	164
8.1.2	Vollständig normierte reelle Kugelflächenfunktionen	166

8.1.3	Komplexe Kugelflächenfunktionen	169
8.1.4	Konjugiert komplexe Kugelflächenfunktionen	170
8.2	Transformationen	172
8.2.1	Transformation zwischen Legendreschen Funktionen	172
8.2.2	Transformation zwischen den Kugelflächenfunktionen	173
8.2.3	Transformation zwischen den Entwicklungskoeffizienten	174
9	Koordinatenverschiebungen	177
9.1	Endliche Drehungen des Koordinatensystems	177
9.1.1	Transformation der Kugelfunktionsentwicklung	177
9.1.2	Transformation der Potentialkoeffizienten	182
9.2	Endliche Translationen des Koordinatensystems	184
9.2.1	Transformation der Kugelfunktionsentwicklung	184
9.2.2	Transformation der Potentialkoeffizienten	186
9.3	Infinitesimale Verschiebungen des Koordinatensystems	187
9.3.1	Verschiebungsoperatoren: Translation und Rotation	187
9.3.2	Verschiebungsoperatoren in sphärischen Polarkoordinaten	191
9.4	Infinitesimale Drehungen des Koordinatensystems	193
9.4.1	Transformation der Kugelfunktionen	193
9.4.2	Transformation der Potentialkoeffizienten	194
9.5	Infinitesimale Translation des Koordinatensystems	198
9.5.1	Transformation der Kugelfunktionen	198
9.5.2	Transformation der Potentialkoeffizienten	200
10	Gravitationsfeldfunktionale in Kugelfunktionen	205
10.1	Reelle Darstellungen	205
10.1.1	Gravitationsfeldstärke	205
10.1.2	Gravitationstensor	207
10.2	Komplexe Darstellung	209
10.2.1	Gravitationsfeldstärke	209
10.2.2	Gravitationstensor	210
10.2.3	Potentielle Energie der Gravitationswechselwirkung	211
10.2.4	Drehmoment	213
10.2.5	Gezeitenpotential	214
10.2.6	Gezeitenkraft	217
10.3	Bemerkungen zur Anwendung auf das Erdsystem	219
Literatur (Auswahl)		223
Stichwortverzeichnis		225