

Inhaltsverzeichnis

1	Graphen	12
1.1	Definitionen	13
1.1.1	Knotengrade	14
1.1.2	Wege und Kreise	16
1.1.3	Zusammenhang	16
1.2	Operationen mit Graphen	17
1.2.1	Entfernen von Knoten und Kanten	17
1.2.2	Fusion und Kontraktion	18
1.2.3	Brücken und Artikulationen	19
1.2.4	Operationen mit Graphen	20
1.3	Spezielle Graphen	21
1.3.1	Der vollständige Graph	21
1.3.2	Weg und Kreis	22
1.3.3	Bäume	22
1.3.4	Bipartite Graphen	24
1.3.5	Reguläre Graphen	25
1.4	Isomorphe Graphen	26
1.4.1	Isomorphie	27
1.4.2	Gradfolgen	27
1.5	Aufgaben	28
2	Graphen und Matrizen	30
2.1	Die Adjazenzmatrix eines Graphen	30
2.1.1	Potenzen der Adjazenzmatrix	31
2.1.2	Zerlegbare Matrizen	32
2.2	Die Inzidenzmatrix	33
2.3	Die Gradmatrix	33
2.4	Abstände in Graphen	34
2.4.1	Radius, Durchmesser und Zentrum	35
2.4.2	Die Abstandsmatrix	36

2.5	Spannbäume	37
2.5.1	Die Anzahl der Spannbäume	38
2.5.2	Die Laplace-Matrix und der Satz von Kirchhoff	40
2.6	Aufgaben	41
3	Planare Graphen – die Eulersche Polyederformel	44
3.1	Planare Einbettungen	44
3.1.1	Ebene Kurven und Einbettungen	44
3.1.2	Flächen eines planaren Graphen	46
3.1.3	Einbettungen auf der Kugel	46
3.1.4	Kreuzungszahl und Dicke	47
3.2	Die Eulersche Polyederformel	48
3.2.1	Polyeder	48
3.2.2	Die Polyederformel für zusammenhängende Graphen	49
3.2.3	Die Polyederformel für nicht zusammenhängende Graphen	51
3.3	Anwendungen der Polyederformel	51
3.3.1	Nichtplanare Graphen	51
3.3.2	Der Satz von Kuratowski	53
3.3.3	Maximale Kantenzahl planarer Graphen	54
3.3.4	Knotengrade in planaren Graphen	54
3.3.5	Platonische Körper	55
3.4	Der duale Graph	57
3.5	Aufgaben	58
4	Unabhängige Knoten- und Kantenmengen	60
4.1	Unabhängige Knotenmengen	61
4.1.1	Die Unabhängigkeitszahl	61
4.1.2	Cliquen	64
4.1.3	Die Überdeckungszahl	65
4.2	Matchings	66
4.2.1	Alternierende Wege – der Satz von Berge	67
4.2.2	Der Satz von König	69

4.3	Der Kantengraph	70
4.4	Faktoren	72
4.5	Aufgaben	73
5	Färbungen von Graphen	75
5.1	Grundlagen	75
5.1.1	Zulässige Färbungen	75
5.1.2	Die chromatische Zahl	76
5.1.3	Schranken für die chromatische Zahl	77
5.2	Färbungen von planaren Graphen	79
5.3	Das chromatische Polynom	81
5.3.1	Der vollständige Graph	82
5.3.2	Der Baum	82
5.3.3	Die Dekompositionsgleichung	82
5.3.4	Der Kreis	84
5.3.5	Chromatisches Polynom und chromatische Zahl	85
5.3.6	Partitionen der Knotenmenge	86
5.4	Eine Anwendung	87
5.5	Aufgaben	90
6	Der Zusammenhang von Graphen	92
6.1	Der Knotenzusammenhang	92
6.2	Der Kantenzusammenhang	95
6.2.1	Schnittmengen	95
6.2.2	Schnitte	96
6.2.3	Die Kantenzusammenhangszahl	97
6.2.4	Knotenzusammenhang und Kantenzusammenhang . .	97
6.3	Trennende Knotenmengen	98
6.3.1	Anwendung zur Berechnung der Unabhängigkeitszahl	98
6.3.2	Ein Berechnungsbeispiel	99
6.3.3	Die Berechnung des chromatischen Polynoms	100

6.4	Partielle k -Bäume	102
6.4.1	k -Bäume	102
6.4.2	Partielle k -Bäume	103
6.4.3	Serien-Parallel-Graphen	104
6.5	Aufgaben	106
7	Bäume	107
7.1	Eigenschaften von Bäumen	107
7.1.1	Die Anzahl der Bäume	108
7.1.2	Der Prüfercode und der Satz von Cayley	109
7.1.3	Isomorphieklassen von Bäumen	111
7.2	Wurzelbäume	111
7.3	Binäre Bäume	114
7.4	Aufgaben	116
8	Kreise	118
8.1	Kreise in Graphen	118
8.1.1	Taille und Umfang	119
8.1.2	Basiskreise	120
8.2	Hamiltonkreise	121
8.3	Eulerkreise	124
8.4	Aufgaben	126
9	Gerichtete Graphen	128
9.1	Definitionen und Eigenschaften gerichteter Graphen	128
9.1.1	Wege und Erreichbarkeit	129
9.1.2	Zusammenhang und starker Zusammenhang	129
9.1.3	Orientierungen	130
9.1.4	Innen- und Außengrad	131
9.1.5	Quellen und Senken	132
9.1.6	Vektorräume	133
9.1.7	Kozyklen	134
9.1.8	Zyklen- und Kozyklenräume	135

9.2	Turniere	139
9.3	Flüsse in Graphen	142
9.4	Aufgaben	146
10	Graphenalgorithmen	147
10.1	DFS: Tiefensuche in Graphen	148
10.1.1	Test auf Zusammenhang	151
10.1.2	Ein modifizierter DFS-Algorithmus	152
10.1.3	Brücken und Artikulationen	153
10.2	BFS: Breitensuche in Graphen	158
10.2.1	Abstände in Graphen	158
10.2.2	Kürzeste Wege	160
10.2.3	Die Anzahl der kürzesten Wege	160
10.2.4	Die Stress-Zentralität	163
10.3	Schnitte und Kantenzusammenhang	166
10.3.1	Der lokale Kantenzusammenhang	166
10.3.2	Die Kantenzusammenhangszahl	170
10.4	Projekte	172
	Lösungen	175
	Literaturverzeichnis	187
	Symbolverzeichnis	190
	Sachwortverzeichnis	191