

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretischer Hintergrund	7
2.1	Begründen, Beweisen und Argumentieren im Mathematikunterricht der Grundschule	7
2.1.1	Beweisverständnis in der Mathematik und der Mathematikdidaktik	8
2.1.2	Funktionen von mathematischen Begründungen und Beweisen	10
2.1.3	Normative Vorgaben	13
2.1.3.1	NCTM-Standards	13
2.1.3.2	Deutsche Bildungsstandards	15
2.2	Begriffsdefinitionen und Begriffshierarchien	16
2.2.1	„Beweisen“	17
2.2.2	„Begründen“ als Teilschritt des „Beweisens“	20
2.2.3	„Begründen“ als Erweiterung eines formal-deduktiven Beweisverständnisses	21
2.2.4	„Begründen“ als Oberbegriff	22
2.2.5	„Argumentieren“ als Oberbegriff	24
2.2.6	Innermathematisches und außermathematisches Argumentieren	26
2.2.7	Argumentationsmodell nach Toulmin	27
2.2.8	Begriffsverständnis in dieser Arbeit	27

2.3	Argumentieren, Beweisen und Begründen als mathematische Kompetenzen	29
2.3.1	Kompetenzbegriff und Kompetenzmodelle	30
2.3.2	Mathematische Argumentationskompetenz	32
2.3.3	Beweiskompetenz in der Sekundarstufe	35
2.3.4	Mathematische Begründungskompetenz in der Grundschule	37
2.4	Empirische Befunde zu mathematischen Begründungskompetenzen von Grundschüler_innen	40
2.5	Förderung von Begründungskompetenzen im Mathematikunterricht	50
2.5.1	Didaktisch-methodische Empfehlungen für die Förderung von Begründungskompetenzen	50
2.5.1.1	Begründungsanlässe schaffen	50
2.5.1.2	Selbstständige Exploration in aktiv-entdeckenden Unterrichtsformen	52
2.5.1.3	Geeignete Aufgabenstellungen	56
2.5.1.4	Begründen als Unterrichtsthema	59
2.5.1.5	Vielfalt verwendeter Begründungstypen	62
2.5.2	Maßnahmen zur Förderung von Begründungskompetenzen	67
2.5.2.1	Maßnahmen in den Sekundarstufen	67
2.5.2.2	„Vier-Phasen-Unterrichtsmodell“ für Grundschüler_innen nach Bezold	68
2.6	Stochastik in der Grundschule	70
2.6.1	Fachmathematische Grundlagen	71
2.6.1.1	Kombinatorik, Statistik und Probabilistik	71
2.6.1.2	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff	73
2.6.1.3	Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff	74
2.6.1.4	Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff	75
2.6.2	Thematisierung im Mathematikunterricht	76
2.6.2.1	Relevanz des Themas	76
2.6.2.2	Didaktische Ziele	77
2.6.2.3	Normative Vorgaben	81
2.6.2.3.1	NCTM-Standards	81
2.6.2.3.2	Deutsche Bildungsstandards	83
2.6.3	Didaktisch-methodische Empfehlungen für den Stochastikunterricht	84
2.6.4	Stochastik und Begründen	89

3	Forschungsparadigmatische Einordnung	91
4	Teilstudie 1	95
4.1	Ziele und Fragestellungen der Untersuchung	95
4.2	Untersuchungsdesign	100
4.3	Test	102
4.3.1	Arithmetische Testaufgabe	103
4.3.2	Stochastische Testaufgaben	105
4.3.3	Durchführung	110
4.4	Kompetenzstufenmodell als Auswertungsinstrument	111
4.4.1	Ursprung des Modells	111
4.4.2	Skala „Mathematische Zusammenhänge erkennen“	113
4.4.3	Begründungsskala „Mathematische Anforderungen“	114
4.4.4	Begründungsskala „Sprachliche Anforderungen“	115
4.5	Treatments	118
4.5.1	Entwicklung	118
4.5.1.1	Treatment 1 „Stochastik und Begründen“	119
4.5.1.2	Treatment 2 „Stochastik“	127
4.5.2	Pilotierung	129
4.6	Stichprobe und Durchführung	134
4.7	Ergebnisse	136
4.7.1	Auswertungsmethodik	137
4.7.1.1	Methodisches Vorgehen	137
4.7.1.2	H-Test von Kruskal und Wallis	138
4.7.1.3	U-Test von Mann-Whitney	140
4.7.1.4	Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test	142
4.7.2	Pretestergebnisse als Ausgangssituation der Intervention	143
4.7.2.1	Testaufgabe Stochastik 1	143
4.7.2.2	Testaufgabe Stochastik 2	146
4.7.2.3	Testaufgabe Arithmetik	150
4.7.3	Förderbarkeit schriftlicher mathematischer Begründungskompetenzen	153
4.7.3.1	Testaufgabe Stochastik 1	153
4.7.3.2	Testaufgabe Stochastik 2	156
4.7.3.3	Zusammenfassung	159
4.7.4	Einflussfaktoren auf die Weiterentwicklung von Begründungskompetenzen	159
4.7.4.1	Testaufgabe Stochastik 1	160

4.7.4.2	Testaufgabe Stochastik 2	164
4.7.4.3	Zusammenfassung	166
4.7.5	Einfluss der Intervention auf Begründungskompetenzen in arithmetischen Aufgabenkontexten	167
4.7.6	Persistenz der Effekte der Intervention	170
4.7.7	Interpretation der Ergebnisse	171
5	Teilstudie 2	175
5.1	Ziele und Fragestellungen der Untersuchung	175
5.2	Untersuchungsdesign und Untersuchungsinstrumente	179
5.3	Stichprobe und Durchführung	180
5.4	Ergebnisse	182
5.4.1	Auswertungsmethodik	183
5.4.1.1	Methodisches Vorgehen	183
5.4.1.2	Mantel-Haenszel-Chi-Quadrat-Test	184
5.4.1.3	Cohens Kappa	186
5.4.2	Schriftliche Begründungskompetenzen von Viertklässler_innen im Kontext stochastischer Aufgabenstellungen	186
5.4.2.1	Testaufgabe Stochastik 1	187
5.4.2.2	Testaufgabe Stochastik 2	189
5.4.2.3	Vergleich der Ergebnisse aus den Testaufgaben Stochastik 1 und 2	192
5.4.2.4	Interpretation der Ergebnisse	196
5.4.3	Vergleich der Ergebnisse von Teilstudie 1 und 2	200
5.4.3.1	Testaufgabe Stochastik 1	200
5.4.3.2	Testaufgabe Stochastik 2	203
5.4.3.3	Interpretation der Ergebnisse	205
5.4.4	Beurteilerreliabilität des Kompetenzstufenmodells	206
6	Resümee und Ausblick	209
6.1	Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse	209
6.2	Kritische Reflexion der Untersuchung	215
6.3	Ausblick	217
6.3.1	Konsequenzen für die Forschung	217
6.3.1.1	Förderung von Begründungskompetenzen	217
6.3.1.2	Weiterentwicklung des Kompetenzstufenmodells	218

6.3.1.3	Begründungskompetenzen von Schüler_innen	219
6.3.2	Konsequenzen für die Praxis	219
Literaturverzeichnis		223