

Inhalt

Kapitel I Grundlagen

§ 1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen	
1 Vorläufiges über Mengen und Aussagen	13
2 Vorläufiges über die reellen Zahlen	15
3 Rechengesetze für reelle Zahlen	16
4 Das Rechnen in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$	16
5 Die Anordnung der reellen Zahlen	17
6 Vollständige Induktion	21
7 Intervalle	25
8 Beschränkte Mengen, obere und untere Schranken	26
9 Maximum und Minimum	27
10 Archimedische Anordnung von $\mathbb{Q}$	28
11 Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$	28
12 Zur Lückenhaftigkeit von $\mathbb{Q}$	29
§ 2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, konvergente Folgen	
1 Supremum und Infimum	30
2 Folgerungen aus dem Supremumsaxiom	31
3 Folgen, Rekursion, Teilfolgen	34
4 Nullfolgen	35
5 Sätze über Nullfolgen	39
6 Grenzwerte von Folgen	40
7 Existenz der m -ten Wurzel, rationale Potenzen	44
8 Intervallschachtelungen	45
9 Grenzwertfreie Konvergenzkriterien	48
§ 3 Elementare Funktionen	
1 Die Folge $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	52
2 Die Exponentialfunktion	54
3 Funktionen, Abbildungen	57
4 Die Logarithmusfunktion	60
5 Die allgemeine Potenz und der Zehnerlogarithmus	61
6 Zusammengesetzte Funktionen	62
7 Polynome und rationale Funktionen	63
8 Die trigonometrischen Funktionen	69
§ 4 Mengen und Wahrscheinlichkeit	
1 Einfache Mengenalgebra	76
2 Exkurs über logisches Schließen und Beweistechnik	78
3 Notwendige und hinreichende Bedingungen	80
4 Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte	80

5	Beispiele zur Wahrscheinlichkeit	81
6	Das mathematische Modell endlicher Zufallsexperimente	83
7	Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	86
8	Kombinatorische Grundformeln (Teil I)	88
9	Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung	93
10*	Kombinatorische Grundformeln (Teil II)	98

Kapitel II Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

§ 5 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$, komplexe Zahlen

1	Vektorielle Größen in der Physik	100
2	Vektoren in der ebenen Geometrie	100
3	Koordinatendarstellung von Punkten und Vektoren	104
4	Punkte und Vektoren	107
5	Geraden und Strecken, Schnitt zweier Geraden	108
6	Lineare 2×2 -Gleichungssysteme	110
7	Abstand, Norm, Winkel, ebene Drehungen	111
8	Komplexe Zahlen	114
9	Die komplexe Exponentialfunktion	120
10	Der Fundamentalsatz der Algebra, Beispiele	121
11	Drehungen und Spiegelungen in komplexer Schreibweise	124

§ 6 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

1	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$	126
2	Skalarprodukt, Längen, Winkel	128
3	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$	132
4	Entwicklung nach Orthonormalsystemen, Orthonormalbasen	137
5	Aufgaben	139

Kapitel III Analysis einer Veränderlichen

§ 7 Unendliche Reihen

1	Reihen im Reellen	141
2	Konvergenzkriterien für Reihen	145
3	Komplexe Folgen, Vollständigkeit von $\mathbb{C}$	148
4	Reihen mit komplexen Gliedern	150
5	Cauchy-Kriterium und Majorantenkriterium	152
6	Umordnung von Reihen	154
7	Das Cauchy-Produkt	158

§ 8 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1	Grenzwerte von Funktionen	159
2	Stetigkeit	165
3	Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen	167
4	Die Hauptsätze über stetige Funktionen	168
5	Die Stetigkeit der Umkehrfunktion	172

6*	Der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit	173
§ 9	Differentialrechnung	
1	Vorbemerkungen	175
2	Differenzierbarkeit und Ableitung	177
3	Differentiation zusammengesetzter Funktionen	180
4	Mittelwertsätze und Folgerungen	183
5	Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion und Beispiele	185
6	Höhere Ableitungen und C^n -Funktionen	187
7	Taylorentwicklung	189
8	Lokale Minima und Maxima	193
9	Bestimmung von Grenzwerten nach de l'Hospital	195
§ 10	Reihenentwicklungen und Schwingungen	
1	Taylorreihen	197
2	Potenzreihen	203
3	Gliedweise Differenzierbarkeit und Identitätssatz	206
4	Theorie der Schwingungsgleichung	208
5	Lösung der Schwingungsgleichung durch komplexen Ansatz	213
§ 11	Integralrechnung	
1	Treppenfunktionen und ihr Integral	217
2	Der gleichmäßige Abstand zweier beschränkter Funktionen	220
3	Integrierbare Funktionen und Eigenschaften des Integrals	222
4	Zwei wichtige Klassen integrierbarer Funktionen	225
5	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	227
6	Partielle Integration	231
7	Die Substitutionsregel	234
8	Integration rationaler Funktionen	239
9	Integrale mit Potenzen von $\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$	243
10	Übergang zum halben Winkel	245
11	Schlußbemerkungen	246
§ 12	Vertauschung von Grenzprozessen, uneigentliche Integrale	
1	Problemstellungen, Beispiele	248
2	Gleichmäßige Konvergenz von Folgen und Reihen	249
3	Vertauschung von Grenzübergängen	254
4	Uneigentliche Integrale	258
5	Substitution und partielle Integration, Gamma-Funktion	263
§ 13	Elementar integrierbare Differentialgleichungen	
1	Die lineare Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$	268
2	Zwei aufschlußreiche Beispiele	273
3	Die separierte Differentialgleichung $y' = a(x)b(y)$	275
4	Zurückführung auf getrennte Variable	282
5	Wegweiser: Differentialgleichungen in Band 1 und Band 2	283

Kapitel IV Lineare Algebra

§ 14 Vektorräume

1 Wovon handelt lineare Algebra ?	284
2 Vektorräume	286
3 Teilräume	289
4 Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensystem	291
5 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	292
6 Vektorräume mit Basis	294

§ 15 Lineare Abbildungen und Matrizen

1 Beispiele linearer Abbildungen	299
2 Die Dimensionsformel	301
3 Verknüpfung linearer Abbildungen	303
4 Lineare Abbildungen und Matrizen	303
5 Matrizenrechnung	307
6 Invertierbare lineare Abbildungen und reguläre Matrizen	312
7 Basiswechsel und Koordinatentransformation	313

§ 16 Lineare Gleichungen

1 Problemstellungen und Beispiele	315
2 Allgemeines zur Lösbarkeit und zur Lösungsmenge	316
3 Rangbedingungen	317
4 Das Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	319
5 Interpolation und numerische Quadratur	324
6 Die Methode der kleinsten Quadrate	327

§ 17 Determinanten

1 Beispiele	329
2 Definition der Determinante	331
3 Eigenschaften der Determinante	336
4 Das Volumen von Parallelepipeden	340
5* Orientierung und Determinante	343

§ 18 Eigenwerte und Eigenvektoren

1 Diagonalisierbarkeit und Eigenwertproblem	344
2 Eigenwerte und Eigenvektoren	346
3 Das charakteristische Polynom	348
4 Diagonalisierbarkeit von Operatoren	350
5 Entkopplung von Systemen linearer Differentialgleichungen	353

§ 19 Skalarprodukte, Orthonormalsysteme und unitäre Gruppen

1 Skalarprodukträume	355
2 Orthonormalsysteme und orthogonale Projektionen	358
3 Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt	362
4 Unitäre Abbildungen und Matrizen	364
5 Matrix- und Transformationsgruppen	369

§ 20 Symmetrische Operatoren und quadratische Formen

1	Quadratische Formen	374
2	Symmetrische Operatoren und quadratische Formen	376
3	Diagonalisierbarkeit symmetrischer Operatoren	378
4	Hauptachsentransformation	380
5	Gekoppelte Systeme von Massenpunkten	384

Kapitel V Analysis mehrerer Variabler**§ 21 Topologische Grundbegriffe normierter Räume**

1	Normierte Räume	388
2	Konvergente Folgen	390
3	Offene und abgeschlossene Mengen	391
4	Inneres, Äußeres, Abschluß und Rand einer Menge	394
5	Vollständigkeit	396
6	Kompakte Teilmengen	397
7	Stetige Funktionen	399
8	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	403
9	Zusammenhang, Gebiete	404

§ 22 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

1	Differenzierbarkeit und Ableitung	406
2	Rechenregeln für differenzierbare Funktionen	414
3	Gradient, Richtungsableitung und Hauptsatz	418
4	Der Satz von Taylor	423
5	Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen	428
6	Lokale Extrema unter Nebenbedingungen	438

§ 23 Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

1	Das Integral für Treppenfunktionen	442
2	Integration stetiger Funktionen über kompakte Quader	446
3	Das Volumen von Rotationskörpern	450
4	Das Integral stetiger Funktionen über offene Mengen	451
5	Parameterintegrale über offene Mengen	456
6	Sukzessive Integration	458
7	Das n -dimensionale Volumen	462
8	Der Transformationssatz und Anwendungen	465

Kapitel VI Vektoranalysis**§ 24 Kurvenintegrale**

1	Kurvenstücke	470
2	Länge und Bogenlänge	472
3	Skalare Kurvenintegrale	475
4	Vektorielle Kurvenintegrale	476
5	Konservative Vektorfelder und Potentiale	480

6*	Kurvenintegrale und Potentiale in der Thermodynamik	489
7	Divergenz, Laplace-Operator, Rotation, Vektorpotentiale	491
§ 25	Oberflächenintegrale	
1	Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$	493
2	Der Flächeninhalt von Flächenstücken	496
3	Oberflächenintegrale	500
§ 26	Die Integralsätze von Stokes, Gauß und Green	
1	Übersicht	504
2	Der Integralsatz von Stokes	505
3	Der Stokessche Integralsatz in der Ebene	515
4	Der Integralsatz von Gauß	519
5	Anwendungen des Gaußschen Satzes, Greensche Formeln	525
6	Anwendungen der Integralsätze in der Physik	527
Kapitel VII Einführung in die Funktionentheorie		
§ 27	Die Hauptsätze der Funktionentheorie	
1	Holomorphie, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	533
2	Komplexe Kurvenintegrale und Stammfunktionen	537
3	Analytische Funktionen	544
4	Der Cauchysche Integralsatz	547
5	Die Cauchysche Integralformel und ihre Konsequenzen	549
6	Ganze Funktionen und Satz von Liouville	552
7	Der Satz von Morera und Folgerungen	554
8	Zusammenfassung der Hauptsätze	555
§ 28	Isolierte Singularitäten, Laurent-Reihen und Residuensatz	
1	Einteilung isolierter Singularitäten	556
2	Laurent-Entwicklung	557
3	Charakterisierung isolierter Singularitäten	562
4	Der Residuenkalkül	565
5	Der Residuensatz	566
6	Berechnung von Reihen mit Hilfe des Residuensatzes	567
7	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes	570
Namen und Lebensdaten		573
Literaturverzeichnis		574
Symbole und Abkürzungen		576
Index		578