

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Vorwort</b>                                                              | <b>v</b>   |
| <b>Inhaltsverzeichnis</b>                                                   | <b>vii</b> |
| <b>1 Einführung und Motivation</b>                                          | <b>1</b>   |
| <b>2 Postulate und Gesetze der Newton'schen Mechanik</b>                    | <b>5</b>   |
| 2.1 Skizze der Postulate . . . . .                                          | 6          |
| 2.2 Der <i>Massenpunkt</i> als Baustein der Mechanik . . . . .              | 8          |
| 2.3 Struktur von Raum und Zeit . . . . .                                    | 10         |
| 2.3.1 Raum und Zeit - etwas allgemeiner . . . . .                           | 13         |
| 2.3.2 Raum und Zeit - noch allgemeiner . . . . .                            | 15         |
| 2.4 Abgeschlossene mechanische Systeme und Teilsysteme . . . . .            | 16         |
| 2.4.1 Beispiel 1: das Newton'sche Gravitationsgesetz . . . . .              | 17         |
| 2.4.2 Beispiel 2: das Coulomb-Gesetz . . . . .                              | 20         |
| 2.4.3 Was lernen wir aus diesen beiden Beispielen? . . . . .                | 22         |
| 2.5 Galilei-Transformationen . . . . .                                      | 24         |
| 2.5.1 Zeittranslationen . . . . .                                           | 25         |
| 2.5.2 Translationen im Ortsraum . . . . .                                   | 25         |
| 2.5.3 Geschwindigkeitstransformationen . . . . .                            | 26         |
| 2.5.4 Drehungen . . . . .                                                   | 27         |
| 2.5.5 Raumspiegelungen . . . . .                                            | 29         |
| 2.5.6 Die Galilei-Gruppe . . . . .                                          | 30         |
| 2.6 Das deterministische Prinzip der Klassischen Mechanik . . . . .         | 31         |
| 2.7 Konsequenzen der Galilei-Kovarianz für die Bewegungsgleichung . . . . . | 35         |
| 2.7.1 Folgen der Galilei-Kovarianz für Einteilchensysteme . . . . .         | 35         |
| 2.7.2 Folgen der Galilei-Kovarianz für Vielteilchensysteme . . . . .        | 37         |
| 2.8 Beispiele . . . . .                                                     | 39         |
| 2.9 Weitere Galilei-Transformationen? * . . . . .                           | 40         |
| 2.10 Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse . . . . .                    | 43         |
| 2.11 Übungsaufgaben . . . . .                                               | 45         |
| <b>3 Abgeschlossene mechanische Systeme</b>                                 | <b>51</b>  |
| 3.1 Allgemeine Eigenschaften abgeschlossener Mehrteilchensysteme . . . . .  | 52         |
| 3.2 Transformationsverhalten von Erhaltungsgrößen . . . . .                 | 61         |
| 3.3 Zweiteilchenproblem: allgemeine Eigenschaften . . . . .                 | 66         |

|          |                                                              |            |
|----------|--------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.1    | Kreisbahnen . . . . .                                        | 72         |
| 3.3.2    | Kleine Schwingungen . . . . .                                | 73         |
| 3.4      | Kegelschnitte . . . . .                                      | 75         |
| 3.4.1    | Ellipsen . . . . .                                           | 76         |
| 3.4.2    | Hyperbeln . . . . .                                          | 77         |
| 3.4.3    | Parabeln . . . . .                                           | 78         |
| 3.5      | Der harmonische Oszillator . . . . .                         | 78         |
| 3.6      | Das Kepler-Problem . . . . .                                 | 81         |
| 3.6.1    | Was wissen wir bereits aus allgemeinen Überlegungen? . . . . | 82         |
| 3.6.2    | Eine dritte Erhaltungsgröße: der Lenz'sche Vektor! . . . . . | 85         |
| 3.6.3    | Energie der Kepler-Bahn und Exzentrizität . . . . .          | 91         |
| 3.6.4    | Die Zeitabhängigkeit der Kepler-Bewegung . . . . .           | 92         |
| 3.6.5    | Der Virialsatz . . . . .                                     | 95         |
| 3.6.6    | Ausblick: das quantenmechanische Wasserstoffproblem . . . .  | 96         |
| 3.6.7    | Die Bahn des Merkur . . . . .                                | 96         |
| 3.7      | Geschlossene Bahnen und Ähnlichkeit . . . . .                | 99         |
| 3.8      | Kleine Schwingungen im Vielteilchenproblem . . . . .         | 100        |
| 3.8.1    | Allgemeine Eigenschaften . . . . .                           | 101        |
| 3.8.2    | Beispiel: ein 3-atomiges Ringmolekül . . . . .               | 105        |
| 3.8.3    | Beispiel: ein N-atomiges Ringmolekül . . . . .               | 107        |
| 3.9      | Übungsaufgaben . . . . .                                     | 110        |
| <b>4</b> | <b>Teilsysteme</b> . . . . .                                 | <b>117</b> |
| 4.1      | Allgemeine Eigenschaften von Teilsystemen . . . . .          | 117        |
| 4.1.1    | Einteilchen-Teilsysteme . . . . .                            | 117        |
| 4.1.2    | Mehrteilchen-Teilsysteme . . . . .                           | 119        |
| 4.2      | Der allgemeine harmonische Oszillator . . . . .              | 122        |
| 4.2.1    | Ohne Reibung, ohne antreibende Kraft . . . . .               | 124        |
| 4.2.2    | Mit antreibender Kraft, ohne Reibung . . . . .               | 126        |
| 4.2.3    | Mit Reibung, ohne antreibende Kraft . . . . .                | 128        |
| 4.2.4    | Mit Reibung und antreibender Kraft . . . . .                 | 132        |
| 4.3      | Das Pendel . . . . .                                         | 135        |
| 4.3.1    | Das sphärische Pendel, allgemeine Eigenschaften . . . . .    | 135        |
| 4.3.2    | Das mathematische Pendel . . . . .                           | 139        |
| 4.3.3    | Das sphärische Pendel . . . . .                              | 142        |
| 4.3.4    | Das isochrone Pendel . . . . .                               | 150        |
| 4.4      | Die Lorentz-Kraft . . . . .                                  | 155        |
| 4.4.1    | Galilei-Kovarianz der Lorentz-Bewegungsgleichung . . . . .   | 156        |
| 4.4.2    | Beispiel: konstante Felder . . . . .                         | 158        |
| 4.5      | Schwimmende Körper . . . . .                                 | 161        |
| 4.5.1    | Bedingung 1: Kräftegleichgewicht . . . . .                   | 161        |
| 4.5.2    | Bedingung 2: Gleichgewicht der Drehmomente . . . . .         | 163        |
| 4.5.3    | Bedingung 3: Stabilität der Gleichgewichtslage . . . . .     | 163        |
| 4.5.4    | Spezialfall: schwimmende <i>homogene</i> Körper . . . . .    | 168        |
| 4.6      | Übungsaufgaben . . . . .                                     | 170        |

|          |                                                                                         |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Spezielle Relativitätstheorie</b>                                                    | <b>175</b> |
| 5.1      | Die Galilei-Kovarianz stößt an ihre Grenzen . . . . .                                   | 176        |
| 5.1.1    | Die Maxwell-Gleichungen und ihre Eigenschaften . . . . .                                | 176        |
| 5.1.2    | Sind die Maxwell-Gleichungen Galilei-kovariant? . . . . .                               | 181        |
| 5.2      | Die Postulate der Speziellen Relativitätstheorie . . . . .                              | 184        |
| 5.3      | Erste Konsequenzen der Postulate . . . . .                                              | 186        |
| 5.4      | Der Abstand und die Eigenzeit . . . . .                                                 | 190        |
| 5.5      | Poincaré- und Lorentz-Transformationen . . . . .                                        | 195        |
| 5.6      | Physikalische Folgen der Lorentz-Kovarianz . . . . .                                    | 205        |
| 5.6.1    | Das Additionsgesetz für Geschwindigkeiten . . . . .                                     | 209        |
| 5.6.2    | Transformationsverhalten von Winkelvariablen . . . . .                                  | 211        |
| 5.6.3    | Weitere optische Effekte . . . . .                                                      | 212        |
| 5.7      | 4-Schreibweise und 4-Vektoren . . . . .                                                 | 216        |
| 5.7.1    | 4-Schreibweise . . . . .                                                                | 217        |
| 5.7.2    | Poincaré- und Lorentz-Transformationen . . . . .                                        | 223        |
| 5.7.3    | Weitere 4-Vektoren . . . . .                                                            | 225        |
| 5.8      | Masse und Energie . . . . .                                                             | 233        |
| 5.9      | Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder . . . . .                               | 235        |
| 5.9.1    | Die relativistische Formulierung der Lorentz-Kraft! . . . . .                           | 238        |
| 5.9.2    | Die Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form . . . . .                                   | 242        |
| 5.10     | Konstante $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Felder . . . . .                             | 247        |
| 5.10.1   | Orthogonale, gleich starke, konstante $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Felder . . . . . | 248        |
| 5.10.2   | Nicht-orthogonale konstante $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Felder . . . . .           | 251        |
| 5.11     | Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen . . . . .                                    | 254        |
| 5.12     | Übungsaufgaben . . . . .                                                                | 264        |
| <b>6</b> | <b>Lagrange-Formulierung der Mechanik</b>                                               | <b>275</b> |
| 6.1      | Warum Analytische Mechanik? . . . . .                                                   | 276        |
| 6.2      | Die Lagrange-Funktion . . . . .                                                         | 277        |
| 6.3      | Das Hamilton'sche Variationsprinzip . . . . .                                           | 284        |
| 6.3.1    | Einfache Beispiele aus der Variationsrechnung . . . . .                                 | 290        |
| 6.4      | Invarianzen der Lagrange-Gleichung . . . . .                                            | 295        |
| 6.4.1    | Addition einer „vollständigen Zeitableitung“ . . . . .                                  | 296        |
| 6.4.2    | Galilei-Invarianz . . . . .                                                             | 296        |
| 6.4.3    | Eichinvarianz . . . . .                                                                 | 298        |
| 6.4.4    | Invarianz unter „Zeitumkehr“ . . . . .                                                  | 299        |
| 6.5      | Zwangsbedingungen . . . . .                                                             | 301        |
| 6.5.1    | Beispiele für <i>holonome</i> Zwangsbedingungen . . . . .                               | 302        |
| 6.5.2    | Beispiele für <i>nicht-holonome</i> Zwangsbedingungen . . . . .                         | 305        |
| 6.6      | Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .                                                  | 306        |
| 6.6.1    | Bewegungsgleichung in verallgemeinerten Koordinaten . . . . .                           | 309        |
| 6.7      | Verallgemeinerte Kräfte . . . . .                                                       | 313        |
| 6.7.1    | Geschwindigkeitsunabhängige Kräfte . . . . .                                            | 314        |
| 6.7.2    | Lorentz-Kräfte . . . . .                                                                | 315        |
| 6.7.3    | Reibungskräfte . . . . .                                                                | 318        |
| 6.7.4    | Historische Anmerkungen . . . . .                                                       | 318        |
| 6.8      | Beispiel einer rheonomen Zwangsbedingung . . . . .                                      | 319        |
| 6.9      | Das Hamilton'sche Prinzip in verallgemeinerten Koordinaten . . . . .                    | 323        |

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 6.10     | Die Lagrange-Gleichungen der ersten Art . . . . .              | 324        |
| 6.11     | Erhaltungsgrößen . . . . .                                     | 328        |
| 6.11.1   | Das Jacobi-Integral . . . . .                                  | 328        |
| 6.11.2   | Zyklische Koordinaten . . . . .                                | 330        |
| 6.11.3   | Elimination von zyklischen Koordinaten . . . . .               | 331        |
| 6.11.4   | Die Zeit als zyklische Variable . . . . .                      | 334        |
| 6.12     | Das Noether-Theorem . . . . .                                  | 335        |
| 6.12.1   | Beispiele . . . . .                                            | 339        |
| 6.12.2   | Weitere Verallgemeinerung des Noether-Theorems? * . . . .      | 340        |
| 6.12.3   | Spezialfall: zeitunabhängige Punkttransformationen * . . . .   | 342        |
| 6.13     | Nicht-holonome Zwangsbedingungen . . . . .                     | 343        |
| 6.14     | Übungsaufgaben . . . . .                                       | 347        |
| <b>7</b> | <b>Hamilton-Formulierung der Mechanik</b>                      | <b>357</b> |
| 7.1      | Die Legendre-Transformation . . . . .                          | 359        |
| 7.1.1    | Funktionen einer eindimensionalen reellen Variablen . . . . .  | 360        |
| 7.1.2    | Funktionen mehrerer Variabler . . . . .                        | 362        |
| 7.1.3    | Funktionen mit zusätzlichen inerten Variablen . . . . .        | 364        |
| 7.2      | Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion . . . . .        | 365        |
| 7.3      | Die Hamilton-Gleichungen . . . . .                             | 367        |
| 7.4      | Anwendung des Hamilton-Formalismus . . . . .                   | 371        |
| 7.4.1    | Geschwindigkeitsunabhängige Kräfte . . . . .                   | 371        |
| 7.4.2    | Lorentz-Kräfte . . . . .                                       | 373        |
| 7.4.3    | Kleine Schwingungen . . . . .                                  | 374        |
| 7.5      | Ein Variationsprinzip für die Hamilton-Gleichungen . . . . .   | 379        |
| 7.6      | Hamilton-Gleichungen „der ersten Art“ . . . . .                | 381        |
| 7.6.1    | Holonome Zwangsbedingungen . . . . .                           | 381        |
| 7.6.2    | Nicht-holonome Zwangsbedingungen . . . . .                     | 382        |
| 7.7      | Die Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .                        | 383        |
| 7.7.1    | Hamiltons Wirkungsfunktion und ihre Eigenschaften . . . . .    | 383        |
| 7.7.2    | Herleitung der Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .             | 384        |
| 7.8      | Erhaltungsgrößen und Poisson-Klammern . . . . .                | 385        |
| 7.8.1    | Beispiel: Vektoren! . . . . .                                  | 388        |
| 7.9      | Kanonische Transformationen . . . . .                          | 389        |
| 7.9.1    | Beispiel: Reskalierung der Impulsvariablen . . . . .           | 390        |
| 7.9.2    | Beispiel: die Berührungstransformation! . . . . .              | 390        |
| 7.9.3    | Varianten der Berührungstransformation . . . . .               | 393        |
| 7.9.4    | Berührungstransformationen als Gruppe . . . . .                | 395        |
| 7.9.5    | <i>Infinitesimale</i> Berührungstransformationen . . . . .     | 395        |
| 7.10     | Beispiele für Berührungstransformationen . . . . .             | 398        |
| 7.10.1   | Beispiel: Translationen . . . . .                              | 398        |
| 7.10.2   | Beispiel: Drehungen . . . . .                                  | 399        |
| 7.10.3   | Beispiel: die Zeitentwicklung . . . . .                        | 401        |
| 7.10.4   | Beispiel: unitäre Transformationen . . . . .                   | 401        |
| 7.10.5   | Beispiel: das Kepler-Problem . . . . .                         | 404        |
| 7.11     | Berührungstransformationen und Poisson-Klammern . . . . .      | 407        |
| 7.11.1   | Invarianz der <i>fundamentalen</i> Poisson-Klammern! . . . . . | 408        |
| 7.11.2   | Invarianz der Poisson-Klammer zweier Observabler! . . . . .    | 409        |

|          |                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 7.11.3   | Zwei Darstellungen der Bewegungsgleichungen? *                | 410        |
| 7.12     | Die symplektische Struktur der Hamilton'schen Mechanik        | 413        |
| 7.13     | Nicht-holonome Systeme *                                      | 416        |
| 7.14     | Übungsaufgaben                                                | 419        |
| <b>8</b> | <b>Der starre Körper</b>                                      | <b>423</b> |
| 8.1      | Anzahl der Freiheitsgrade                                     | 424        |
| 8.2      | Kinetische Energie und Drehimpuls                             | 427        |
| 8.3      | Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers                  | 435        |
| 8.4      | Explizite Form der Drehmatrix und der Winkelgeschwindigkeiten | 438        |
| 8.4.1    | Zusätzliche Zwangsbedingungen                                 | 440        |
| 8.5      | Anwendung der Euler-Gleichung                                 | 444        |
| 8.5.1    | Drei gleiche Hauptträgheitsmomente                            | 444        |
| 8.5.2    | Zwei gleiche Hauptträgheitsmomente                            | 445        |
| 8.6      | Anwendung der Lagrange-Gleichung                              | 450        |
| 8.6.1    | Der symmetrische schwere Kreisel                              | 450        |
| 8.6.2    | Kowalewskajas Kreisel                                         | 454        |
| 8.6.3    | Der Kreisel von Gorjatschew und Tschaplygin                   | 457        |
| 8.6.4    | Astronomische Präzession                                      | 458        |
| 8.7      | Beispiele nicht-holonomer Systeme *                           | 465        |
| 8.7.1    | Allgemeine Überlegungen                                       | 465        |
| 8.7.2    | Beispiel 1: Kugel auf horizontaler Ebene                      | 468        |
| 8.7.3    | Beispiel 2: Kugel auf schiefer Ebene                          | 470        |
| 8.7.4    | Beispiel 3: Kugel in zeitabhängigem Schwerfeld                | 472        |
| 8.7.5    | Beispiel 4: Kugel auf unbeweglicher Kugel                     | 473        |
| 8.7.6    | Beispiel 5: Kugel auf beweglicher Kugel                       | 479        |
| 8.8      | Dynamik im körperfesten Bezugssystem                          | 481        |
| 8.8.1    | Einzelnes Teilchen im körperfesten Bezugssystem               | 482        |
| 8.8.2    | Verallgemeinerung für Vielteilchensysteme                     | 484        |
| 8.9      | Übungsaufgaben                                                | 486        |
| <b>9</b> | <b>Lösungen zu den Übungsaufgaben</b>                         | <b>489</b> |
| 9.2      | Postulate und Gesetze der Newton'schen Mechanik               | 489        |
| 9.3      | Abgeschlossene mechanische Systeme                            | 498        |
| 9.4      | Teilsysteme                                                   | 516        |
| 9.5      | Spezielle Relativitätstheorie                                 | 529        |
| 9.6      | Lagrange-Formulierung der Mechanik                            | 561        |
| 9.7      | Hamilton-Formulierung der Mechanik                            | 584        |
| 9.8      | Der starre Körper                                             | 595        |
| <b>A</b> | <b>Grundlösung der Laplace-Gleichung und Anwendungen</b>      | <b>599</b> |
| A.1      | Die Grundlösung der Laplace-Gleichung                         | 599        |
| A.2      | Anwendung: Gesetze von Newton und Coulomb                     | 600        |
| A.3      | Die Lösung der Poisson-Gleichung                              | 601        |

---

|                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>B Wann sind räumlich begrenzte Umlaufbahnen geschlossen?</b>  | <b>603</b> |
| B.1 Bestimmung der Phasenänderung . . . . .                      | 603        |
| B.2 Parameterunabhängigkeit der Phasenänderung . . . . .         | 604        |
| B.3 Fallunterscheidungen und Konsequenzen . . . . .              | 605        |
| <b>C Das Leiterparadoxon</b>                                     | <b>609</b> |
| C.1 Das Paradoxon im Ruhesystem der <i>Leiter</i> . . . . .      | 610        |
| C.2 Das Paradoxon für eine noch längere Leiter! . . . . .        | 612        |
| C.3 Das Paradoxon im Ruhesystem der <i>Garage</i> . . . . .      | 613        |
| <b>D Lorentz-Bewegungsgleichung in der Analytischen Mechanik</b> | <b>615</b> |
| D.1 Die Lagrange-Formulierung . . . . .                          | 616        |
| D.2 Die Hamilton-Formulierung . . . . .                          | 617        |
| D.3 Analytische Mechanik in kovarianter Form . . . . .           | 618        |
| <b>Liste der Symbole</b>                                         | <b>621</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                                      | <b>625</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b>                                      | <b>627</b> |