

Inhaltsverzeichnis

1 Hängende Kabel und Trassierungen – Steckbriefaufgaben und Entdimensionalisierungen	1
1.1 Einleitung: Stromkabel und Seilbahnen	1
1.1.1 Modell 1: stückweise linearer Verlauf	2
1.1.2 An das Problem angepasste Skalierung und Simulation	5
1.1.3 Modell 2: parabelförmiger Verlauf	6
1.1.4 Modell 3: Die Physiker sagen, es sei eine Kettenlinie	8
1.1.5 Verallgemeinerung: Wie sieht es bei anderen Verhältnissen von Abstand und Durchhang aus?	10
1.1.6 Reflexionen zum mathematischen Modellieren I: der Modellbegriff und Gütekriterien für Modelle	11
1.2 Trassierungsaufgaben und der Begriff der Krümmung	14
1.2.1 Kurven und ihre Krümmung	15
1.2.2 Elementare Theorie ebener Kurven	16
1.2.3 Straßenplanung mit Geraden, Kreisbögen und Klothoiden	22
1.2.4 Reflexionen zum mathematischen Modellieren II: normative Modelle	25
1.3 Der Fahnenmast – vom Nutzen der Entdimensionalisierung und der Wahl geeigneter Skalen	26
1.3.1 Annahmen und Vereinfachungen	26
1.3.2 Das mathematische Modell	27
1.3.3 Entdimensionalisierung	28
1.3.4 Vom Nutzen der Entdimensionalisierung	30
Aufgaben	31
2 Optimale Geschwindigkeiten und optimale Funktionen – Optimierungen und Variationen	39
2.1 Mit welcher Geschwindigkeit erhält man den optimalen Verkehrsfluss? Ein Optimierungsproblem	39

2.1.1	Das Modell „Halber Tacho“	40
2.1.2	Das Modell „Anhalteweg“	40
2.1.3	Bewertung	42
2.2	Woher kennen die Physiker die genaue Form des Kabels? – Die Kettenlinie als Minimierer	44
2.2.1	Das Energiefunktional	44
2.2.2	Ein Minimierer des Energiefunktionals und die Euler-Lagrange-Gleichungen	45
2.2.3	Die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Kabel passen (noch) nicht	48
2.2.4	Die Kabellänge ist vorgegeben: Minimierung unter einer Nebenbedingung	49
2.2.5	Extrema unter Nebenbedingungen im zweidimensionalen Fall: Lagrange'sche Multiplikatoren	50
2.2.6	Minimierer der Energie unter der Nebenbedingungen vorgegebener Kabellänge	52
2.2.7	Beweis: Lagrange-Multiplikator für Extrema unter Nebenbedingungen	53
2.2.8	Einige Bemerkungen zu den Extremalprinzipien	55
2.2.9	Reflexionen zum mathematischen Modellieren III: Ad-hoc-Modelle, Modelle nach First Principles und die „unreasonable effectiveness of mathematics in the natural science“	56
	Aufgaben	57
3	Zinsen, Strahlung und Kaninchen – Modellieren mit linearen Differenzengleichungen	65
3.1	Guthaben und Zinsen	65
3.1.1	Guthaben	65
3.1.2	Festgeldkonto mit jährlicher Einlage	66
3.2	Der Radongehalt in der Luft eines unbelüfteten Kellerraums	66
3.2.1	Modellierung	67
3.2.2	Interpretation	68
3.3	Zusammenfassung, Systematisierung und graphische Analyse	68
3.3.1	Definition, eindeutige Lösbarkeit und Darstellungsformel	68
3.3.2	Das Cobwebbing	68
3.4	Summen der n -ten Potenzen und Kaninchen – das Lösungsschema für lineare Gleichungen	70
3.4.1	Das lineare Lösungsschema	70
3.4.2	Eine Anwendung: die Summe der ersten n -Kubikzahlen	73
3.4.3	Eine zweite Anwendung: die Fibonacci-Folge	75
	Aufgaben	76

4 Insekten zwischen Stabilität und Chaos – Modellieren mit nichtlinearen Differenzgleichungen	81
4.1 Die logistische Differenzgleichung – ein Prototyp für den Übergang von einem stabilen zu einem chaotischen Verhalten	81
4.1.1 Das lineare Modell	81
4.1.2 Das logistische Modell	82
4.1.3 Von stabilen Zuständen in das Chaos	83
4.2 Das Prinzip der Linearisierung	86
4.3 Zurück zur logistischen Differenzgleichung	89
4.3.1 Die Stabilität der stationären und 2-periodischen Punkte und das Bifurkationsdiagramm	89
4.3.2 Der Satz von Sarkovskii und die Feigenbaum-Konstante	91
4.4 Insektenpopulation mit nichtüberlappender Generationenfolge	93
4.4.1 Grundmodelle für Insektenpopulationen mit nichtüberlappender Generationenfolge	93
4.4.2 Das Hassell-Modell mit exakter Kompensation	94
4.4.3 Modelle mit Über- und Unterkompensation	96
4.4.4 Eine Bekämpfungsstrategie: sterile Insekten	99
Aufgaben	103
5 Populationsmodelle und Befischung – Modellieren mit Differentialgleichungen	109
5.1 Modellieren mit Differentialgleichungen	109
5.1.1 Das Modell des exponentiellen Wachstums	110
5.1.2 Das logistische Modell	112
5.2 Qualitatives Lösen von autonomen Differentialgleichungen	115
5.3 Populationsmodelle mit Bejagung	117
5.3.1 Das Lösungsverhalten der logistischen Differentialgleichung	117
5.3.2 Fangstrategien: Fischfang mit konstanter Fangrate und mit konstantem Aufwand	117
5.3.3 Schwellen- und Sättigungseffekte	121
5.4 Der Tannenwickler und die Balsamtanne – erster Teil	124
5.4.1 Die Modellierung der Populationsdichte der Tannenwickler	126
5.4.2 Stationäre Punkte, Bifurkationen und die kritische Kurve	128
5.5 Eine einfache Lösungstheorie für Differentialgleichungen – die Methode von der Trennung der Variablen	132
5.5.1 Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen	133
5.5.2 Grobe Bestimmung der Zeitabhängigkeit und Vergleichssätze	137
5.6 Ein paar ausgewählte Lösungsverfahren	140
5.6.1 Die inhomogene lineare Differentialgleichung	141
5.6.2 Die Bernoulli'sche Differentialgleichung als Beispiel für ein Substitutionsverfahren	143

5.7	Ein einfaches Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen	144
5.8	Modellierungen in Abituraufgaben – Blutalkohol	145
5.8.1	Die Formulierung der Abituraufgabe	146
5.8.2	Die Modellierung der Alkoholkonzentration	147
5.8.3	Die Berechnung der Modellfunktion	151
5.8.4	Vergleich der beiden Modellfunktionen.	152
5.8.5	Reflexionen zum mathematischen Modellieren IV: deskriptive und explikative Modellierungen.	154
	Aufgaben.	155
6	Räuber-Beute-Modelle – Modellieren mit Differentialgleichungssystemen	167
6.1	Das Räuber-Beute-System nach Lotka-Volterra	167
6.2	Lösungstheorie: der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf	169
6.3	Das Lotka-Volterra-System fortgesetzt – die Methode der Lyapunov-Funktion	171
6.3.1	Elementare Diskussion des Phasenporträts	171
6.3.2	Eine numerische Annäherung mit dem expliziten Euler-Verfahren	175
6.3.3	Die Lyapunov-Funktion oder das erste Integral.	176
6.3.4	Mittelwerte und Abschätzungen für die Periode	179
6.3.5	Anwendung auf die Interaktion von Luchs und Schneeschuhhase	181
6.4	Räuber-Beute-Systeme mit logistischem Wachstum – lineare Differentialgleichungssysteme und der Linearisierungssatz von Grobman-Hartman	184
6.4.1	Modellbildung und erste Diskussion des Modells	184
6.4.2	Lineare Differentialgleichungssysteme	187
6.4.3	Die Phasenporträts der linearen Differentialgleichungssysteme für $n = 2$	190
6.4.4	Der Linearisierungssatz von Grobman und Hartman	194
6.4.5	Fortsetzung: Räuber-Beute-Systeme mit logistischem Wachstum.	196
6.4.6	Diskussion des Ergebnisses	198
6.4.7	Könnte es im Räuber-Beute-Modell mit logistischem Wachstum auch unbeschränkte Lösungen geben?	199
6.4.8	Reflexionen über das mathematische Modellieren V: Die Art des Schließens in der mathematischen Untersuchung	203

6.5	Räuber-Beute-Systeme mit Sättigungs- und Schwelleneffekten – stabile Grenzyklen und der Satz von Poincaré-Bendixson	204
6.5.1	Die Modellbildung	204
6.5.2	Diskussion des Räuber-Beute-Modells mit Sättigung	206
6.5.3	Stabile Grenzyklen und der Satz von Poincaré-Bendixson	211
	Aufgaben.	216
7	Würfe, Enzymreaktionen und der Tannenwickler – asymptotische Methoden	223
7.1	Der senkrechte Wurf im Galilei'schen und im Newton'schen Modell	224
7.1.1	Das Galilei'sche Modell des senkrechten Wurfs	224
7.1.2	Das Newton'sche Gravitationsmodell	225
7.1.3	Entdimensionalisierung und Wahl der geeigneten Skalen	228
7.1.4	Die Idee der asymptotischen Entwicklung.	230
7.1.5	Beweis der Approximationseigenschaft.	233
7.2	Reaktionskinetik, Enzyme und die Methode des Asymptotic Matching	235
7.2.1	Das grundlegende Modell für chemische Reaktionen: Reaktionskinetik.	235
7.2.2	Enzymatische Reaktionen – zwei unterschiedliche Zeitskalen und das Verfahren des Asymptotic Matching	237
7.2.3	Entdimensionalisierung und asymptotische Betrachtungen	241
7.3	Der Tannenwickler und die Balsamtanne – zweiter Teil	245
7.3.1	Die Modellbildung	246
7.3.2	Numerische Simulationen	250
7.3.3	Analyse des Systems mit asymptotischen Methoden	252
7.3.4	Bewertung des Modells	259
7.3.5	Exkurs: der Übergang vom stationären Punkt zum oszillierenden Verhalten	260
	Aufgaben.	264
8	Das Modell der Reizverarbeitung in Nervenzellen nach Hodgkin und Huxley – Experimente, Modelle und Spielzeugmodelle	271
8.1	Die Nervenzelle und das Aktionspotential.	272
8.2	Erklärungsansätze vor Hodgkin und Huxley	274
8.3	Die Versuchsreihe von Hodgkin und Huxley	274
8.3.1	Beschreibung des Versuchsaufbaus	274
8.3.2	Die Trennung in kapazitive Ströme und Ionenströme	279
8.3.3	Die Trennung in Natrium- und Kaliumionenströme	283
8.3.4	Der „passive“ Ionentransport und die selektive Leitfähigkeit	286
8.3.5	Die Kaliumleitfähigkeit	290
8.3.6	Die Natriumleitfähigkeit	292
8.3.7	Die qualitative Erklärung des Aktionspotentials	297

8.4	Die mathematische Modellierung und die quantitative Berechnung der Aktionspotentials	298
8.4.1	Die Modellierung der Kaliumleitfähigkeit.	299
8.4.2	Die Modellierung der Natriumleitfähigkeit	303
8.4.3	Simulationen mit Hilfe des mathematischen Modells	305
8.4.4	Die Erkenntnisse von H & H und das heutige Lehrbuchwissen . . .	308
8.5	Toy-Models – das vereinfachte Modell nach FitzHugh-Nagumo	309
8.5.1	Ein Aktionspotential.	312
8.5.2	Ein biochemischer Schalter	313
8.5.3	Eine Folge von Aktionspotentialen: das neuronale Feuern	315
8.6	Vom Spielzeugmodell zum großen Modell: neuronales Feuern im Modell von Hodgkin und Huxley	317
	Aufgaben.	318
 Bisher erschienene Bände der Reihe MathematikPrimarstufe und Sekundarstufe I + II		 321
Literatur		323
Stichwortverzeichnis.		329