

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Elementare und frühe Algebra	7
1.1 Eine Charakterisierung früher Algebra	7
1.1.1 Unterschiedliche Perspektiven elementarer Algebra	7
1.1.2 Algebraische Denkweisen	14
1.1.3 Zwei Sichtweisen auf mathematische Konzepte	16
1.2 Algebraische Denkweisen in Abgrenzung zum arithmetischen Denken	18
1.3 Die Rolle der Symbolsprache in der frühen Algebra	21
1.4 Zusammenfassung frühen algebraischen Denkens.....	24
2. Relationales Denken als Teilbereich früher Algebra	26
2.1 Unterschiedliche Beschreibungen relationalen Denkens.....	26
2.2 Theoretische Einordnung	29
2.2.1 Strukturorientierung und <i>structure sense</i>	30
2.2.2 <i>Number sense</i>	34
2.2.3 <i>Operation sense</i>	36
2.3 Relationales Denken und das Verständnis von Gleichheit	38
2.4 Zusammenfassung	40
3. Variable in der frühen Algebra	41
3.1 Variablenaspekte nach Malle	41
3.2 Variablenaspekte nach Usiskin.....	43
3.3 Variablenaspekte nach Freudenthal	44
3.4 Zusammenfassung: Dreiteilung der Konzeptionalisierung der Variablen	45

4. Forschungsstand	49
4.1 Relationales Denken innerhalb formaler Gleichungen.....	49
4.2 Relationales Denken innerhalb anderer Repräsentationsformen	56
4.2.1 Verständnis äquivalenter Umformungen	56
4.2.2 Lösen linearer Gleichungen nach einer Unbekannten.....	61
4.3 Zusammenfassung	63
4.4 Forschungsergebnisse zum Variablenverständnis	65
4.4.1 Verallgemeinerungsweisen mathematischer Muster	65
4.4.2 Repräsentation von Kisten als Vorläuferform des Variablenverständnisses	69
4.5 Herleitung des Forschungsinteresses	71
 5. Design der empirischen Erhebung	 74
5.1 Forschungsfragen.....	74
5.2 Auswahl der Untersuchungsmethode	75
5.3 Entwicklung des Untersuchungsdesigns	76
5.3.1 Aufgabentyp A: Vergleichen der Mächtigkeiten zweier Mengen.....	78
5.3.2 Aufgabentyp B: Bestimmen der Mächtigkeit einer konkreten Menge	79
5.3.3 Aufgabentyp C: Bestimmen einer Beziehung zwischen zwei unbestimmten Mächtigkeiten von Mengen	82
5.3.4 Aufgabentyp D: Herstellen einer gleichmächtigen Menge	85
5.4 Datenerhebung.....	87
5.5 Datenauswertung	89
 6. Ergebnisse	 95
6.1 Aufgabentyp A.....	95
6.2 Aufgabentyp B.....	102
6.2.1 Kategorisierung der Vorgehensweisen.....	104
6.2.2 Auswertung der Aufgabe B1.....	105

6.2.3 Auswertung der Aufgabe B2.....	111
6.2.4 Auswertung der Aufgabe B3.....	119
6.2.5 Auswertung der Aufgabe B4.....	124
6.2.6 Kategorie „Sonstiges“	141
6.2.7 Zusammenfassung	149
6.3 Aufgabentyp C.....	153
6.3.1 Beschreibung der Kategorien	156
6.3.2 Auswertung der Aufgabe C1	160
6.3.3 Auswertung der Aufgabe C2	184
6.3.4 Auswertung der Aufgabe C3	204
6.3.5 Auswertung der Aufgabe C4	216
6.3.6 Zusammenfassung	230
6.4 Aufgabentyp D.....	245
6.4.1 Auswertung der Aufgabe D1	246
6.4.2 Auswertung der Aufgabe D2	261
6.4.3 Zusammenfassung	269
7. Beantwortung der Forschungsfragen.....	270
7.1 Relationales Denken	270
7.1.1 Zusammenfassung der theoretischen Bezüge	271
7.1.2 Strukturorientiertes und anzahlorientiertes Vorgehen	275
7.1.3 Bezug zum <i>number sense</i>	286
7.1.4 Relationales Denken im Aufgabentyp C	290
7.2 Konzeptionalisierungen der Variablen	295
7.3 Verbindung beider Konzepte	310

8. Fallanalysen	320
8.1 Auswahl der Fallanalysen.....	321
8.2 Fallanalyse 1: Elena	335
8.3 Fallanalyse 2: Matteo	350
8.4 Fallanalyse 3: Aaron.....	361
8.5 Fallanalyse 4: Leonie.....	371
8.6 Fallanalyse 5: Julius	382
8.7 Fallanalyse 6: Desiree	394
8.8 Vergleich der Fallanalysen	408
9. Zusammenfassung und Ausblick	416
9.1 Vorgehensweisen zwischen relationalem und arithmetischem Denken	419
9.2 Konzeptionalisierungen der Variablen	429
9.3 Verbindung beider Konzepte: Herstellen von Beziehungen und die Konzeptionalisierungen der Variablen.....	432
9.4 Resümee	439
9.5 Kritische Reflexion.....	454
9.6 Abschließende Einschätzung und Ausblick	456
10. Literaturverzeichnis.....	460
11. Anhang	469