

# Inhaltsverzeichnis

|   |          |
|---|----------|
| <b>1 Grundlagen</b>   | <b>1</b> |
| 1.1 Reelle Zahlen   | 1        |
| 1.1.1 Die Zahlengerade                                      | 1        |
| 1.1.2 Rechnen mit reellen Zahlen                            | 4        |
| 1.1.3 Ordnung der reellen Zahlen und ihre Vollständigkeit   | 8        |
| 1.1.4 Mengenschreibweise                                    | 11       |
| 1.1.5 Vollständige Induktion                                | 17       |
| 1.1.6 Potenzen, Wurzeln, Absolutbetrag                      | 21       |
| 1.1.7 Summenformeln: geometrische, binomische, polynomische | 24       |
| 1.2 Elementare Kombinatorik                                 | 30       |
| 1.2.1 Fragestellungen der Kombinatorik                      | 30       |
| 1.2.2 Permutationen   | 31       |
| 1.2.3 Permutationen mit Identifikationen                    | 32       |
| 1.2.4 Variationen ohne Wiederholungen                       | 34       |
| 1.2.5 Variationen mit Wiederholungen                        | 37       |
| 1.2.6 Kombinationen ohne Wiederholungen                     | 38       |
| 1.2.7 Kombinationen mit Wiederholungen                      | 39       |
| 1.2.8 Zusammenfassung                                       | 41       |
| 1.3 Funktionen  | 42       |
| 1.3.1 Beispiele   | 42       |
| 1.3.2 Reelle Funktionen einer reellen Variablen             | 44       |
| 1.3.3 Tabellen, graphische Darstellungen, Monotonie         | 46       |
| 1.3.4 Umkehrfunktion, Verkettungen                          | 51       |
| 1.3.5 Allgemeiner Abbildungsbegriff                         | 54       |
| 1.4 Unendliche Folgen reeller Zahlen                        | 56       |
| 1.4.1 Definition und Beispiele                              | 56       |
| 1.4.2 Nullfolgen  | 57       |
| 1.4.3 Konvergente Folgen                                    | 60       |
| 1.4.4 Ermittlung von Grenzwerten                            | 62       |
| 1.4.5 Häufungspunkte, beschränkte Folgen                    | 66       |
| 1.4.6 Konvergenzkriterien                                   | 68       |
| 1.4.7 Lösen von Gleichungen durch Iteration                 | 71       |
| 1.5 Unendliche Reihen reeller Zahlen                        | 74       |
| 1.5.1 Konvergenz unendlicher Reihen                         | 74       |
| 1.5.2 Allgemeine Konvergenzkriterien                        | 79       |
| 1.5.3 Absolut konvergente Reihen                            | 82       |
| 1.5.4 Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen    | 85       |
| 1.6 Stetige Funktionen                                      | 89       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.6.1    | Problemstellung: Lösen von Gleichungen . . . . .  | 89         |
| 1.6.2    | Stetigkeit . . . . .  | 91         |
| 1.6.3    | Zwischenwertsatz . . . . .  | 93         |
| 1.6.4    | Regeln für stetige Funktionen . . . . .   | 97         |
| 1.6.5    | Maximum und Minimum stetiger Funktionen . . . . .   | 99         |
| 1.6.6    | Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .   | 102        |
| 1.6.7    | Grenzwerte von Funktionen . . . . .   | 105        |
| 1.6.8    | Pole und Grenzwerte im Unendlichen . . . . .  | 109        |
| 1.6.9    | Einseitige Grenzwerte, Unstetigkeiten . . . . .   | 112        |
| <b>2</b> | <b>Elementare Funktionen</b>  | <b>115</b> |
| 2.1      | Polynome . . . . .  | 115        |
| 2.1.1    | Allgemeines . . . . .   | 115        |
| 2.1.2    | Geraden . . . . .   | 116        |
| 2.1.3    | Quadratische Polynome, Parabeln . . . . .   | 121        |
| 2.1.4    | Quadratische Gleichungen . . . . .  | 126        |
| 2.1.5    | Berechnung von Polynomwerten, Horner-Schema . . . . .   | 128        |
| 2.1.6    | Division von Polynomen, Anzahl der Nullstellen . . . . .                                      | 132        |
| 2.2      | Rationale und algebraische Funktionen . . . . .   | 135        |
| 2.2.1    | Gebrochene rationale Funktionen . . . . .   | 135        |
| 2.2.2    | Algebraische Funktionen . . . . .   | 139        |
| 2.2.3    | Kegelschnitte . . . . .   | 143        |
| 2.3      | Trigonometrische Funktionen . . . . .   | 147        |
| 2.3.1    | Bogenlänge am Einheitskreis . . . . .   | 147        |
| 2.3.2    | Sinus und Cosinus . . . . .   | 154        |
| 2.3.3    | Tangens und Cotangens . . . . .   | 158        |
| 2.3.4    | Arcus-Funktionen . . . . .  | 161        |
| 2.3.5    | Anwendungen: Entfernungsbestimmung, Schwingungen . . . . .                                    | 164        |
| 2.4      | Exponentialfunktionen, Logarithmus, Hyperbelfunktionen . . . . .                              | 169        |
| 2.4.1    | Allgemeine Exponentialfunktionen . . . . .  | 169        |
| 2.4.2    | Wachstumsvorgänge. Die Zahl $e$ . . . . .   | 172        |
| 2.4.3    | Die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ und der natürliche Logarithmus . . . . .              | 175        |
| 2.4.4    | Hyperbel- und Areafunktionen . . . . .  | 180        |
| 2.5      | Komplexe Zahlen . . . . .   | 183        |
| 2.5.1    | Einführung . . . . .  | 183        |
| 2.5.2    | Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .   | 184        |
| 2.5.3    | Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen . . . . .                                 | 191        |
| 2.5.4    | Polarkoordinaten, geometrische Deutung der komplexen Multiplikation, Zeigerdiagramm . . . . . | 193        |
| 2.5.5    | Fundamentalsatz der Algebra, Folgen und Reihen, stetige Funktionen im Komplexen . . . . .     | 196        |
| <b>3</b> | <b>Differentialrechnung einer reellen Variablen</b>   | <b>199</b> |
| 3.1      | Grundlagen der Differentialrechnung . . . . .   | 199        |
| 3.1.1    | Geschwindigkeit . . . . .   | 199        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.1.2    | Differenzierbarkeit, Tangenten . . . . .  | 202        |
| 3.1.3    | Differentiationsregeln für Summen, Produkte und Quotienten reeller Funktionen                         | 211        |
| 3.1.4    | Kettenregel, Regel für Umkehrfunktionen, implizites Differenzieren . . . . .                          | 214        |
| 3.1.5    | Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .   | 220        |
| 3.1.6    | Ableitungen der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen . . . . .                        | 223        |
| 3.1.7    | Ableitungen der Exponential- und Logarithmus-Funktionen . . . . .                                     | 226        |
| 3.1.8    | Ableitungen der Hyperbel- und Area-Funktionen . . . . .   | 230        |
| 3.1.9    | Zusammenstellung der wichtigsten Differentiationsregeln . . . . .                                     | 230        |
| 3.2      | Ausbau der Differentialrechnung . . . . .   | 232        |
| 3.2.1    | Die Regeln von de l'Hospital . . . . .  | 232        |
| 3.2.2    | Die Taylorsche Formel . . . . .   | 237        |
| 3.2.3    | Beispiele zur Taylorformel . . . . .  | 240        |
| 3.2.4    | Zusammenstellung der Taylorreihen elementarer Funktionen . . . . .                                    | 246        |
| 3.2.5    | Berechnung von $\pi$ . . . . .  | 249        |
| 3.2.6    | Das Newtonsche Verfahren . . . . .  | 255        |
| 3.2.7    | Bestimmung von Extremstellen . . . . .  | 261        |
| 3.2.8    | Kurvendiskussion . . . . .  | 266        |
| 3.3      | Anwendungen . . . . .   | 273        |
| 3.3.1    | Bewegung von Massenpunkten . . . . .  | 273        |
| 3.3.2    | Fehlerabschätzung . . . . .   | 277        |
| 3.3.3    | Zur binomischen Reihe: physikalische Näherungsformeln . . . . .                                       | 278        |
| 3.3.4    | Zur Exponentialfunktion: Wachsen und Abklingen . . . . .  | 279        |
| 3.3.5    | Zum Newtonschen Verfahren . . . . .   | 282        |
| 3.3.6    | Extremalprobleme . . . . .  | 284        |
| <b>4</b> | <b>Integralrechnung einer reellen Variablen</b>   | <b>289</b> |
| 4.1      | Grundlagen der Integralrechnung . . . . .   | 290        |
| 4.1.1    | Flächeninhalt und Integral . . . . .  | 290        |
| 4.1.2    | Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen . . . . .  | 294        |
| 4.1.3    | Graphisches Integrieren, Riemannsche Summen, numerische Integration mit der Tangentenformel . . . . . | 296        |
| 4.1.4    | Regeln für Integrale . . . . .  | 300        |
| 4.1.5    | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .  | 303        |
| 4.2      | Berechnung von Integralen . . . . .   | 306        |
| 4.2.1    | Unbestimmte Integrale, Grundintegrale . . . . .   | 306        |
| 4.2.2    | Substitutionsmethode . . . . .  | 309        |
| 4.2.3    | Produktintegration . . . . .  | 318        |
| 4.2.4    | Integration rationaler Funktionen . . . . .   | 323        |
| 4.2.5    | Integration weiterer Funktionenklassen . . . . .  | 328        |
| 4.2.6    | Numerische Integration . . . . .  | 331        |
| 4.3      | Uneigentliche Integrale . . . . .   | 336        |
| 4.3.1    | Definition und Beispiele . . . . .  | 336        |
| 4.3.2    | Rechenregeln und Konvergenzkriterien . . . . .  | 339        |
| 4.3.3    | Integralkriterium für Reihen . . . . .  | 346        |
| 4.3.4    | Die Integralfunktionen $Ei$ , $Li$ , $si$ , $ci$ , das Fehlerintegral und die Gammafunktion           | 349        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.4      | Anwendung: Wechselstromrechnung . . . . .   | 353        |
| 4.4.1    | Mittelwerte in der Wechselstromtechnik . . . . .  | 353        |
| 4.4.2    | Komplexe Funktionen einer reellen Variablen . . . . .                                       | 355        |
| 4.4.3    | Komplexe Wechselstromrechnung . . . . .   | 359        |
| 4.4.4    | Ortskurven bei Wechselstromschaltungen . . . . .  | 364        |
| <b>5</b> | <b>Folgen und Reihen von Funktionen</b>   | <b>369</b> |
| 5.1      | Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen . . . . .                          | 369        |
| 5.1.1    | Gleichmäßige und punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen . . . . .                       | 369        |
| 5.1.2    | Vertauschung von Grenzprozessen . . . . .   | 373        |
| 5.1.3    | Gleichmäßig konvergente Reihen . . . . .  | 376        |
| 5.2      | Potenzreihen . . . . .  | 379        |
| 5.2.1    | Konvergenzradius . . . . .  | 379        |
| 5.2.2    | Addieren und Multiplizieren von Potenzreihen sowie Differenzieren und Integrieren . . . . . | 383        |
| 5.2.3    | Identitätssatz, Abelscher Grenzwertsatz . . . . .   | 384        |
| 5.3      | Der Weierstraß'sche Approximationssatz . . . . .  | 387        |
| 5.3.1    | Bemerkung zur Polynomapproximation . . . . .  | 387        |
| 5.3.2    | Approximation von stetigen Funktionen durch Bernstein-Polynome . . . . .                    | 388        |
| 5.4      | Interpolation . . . . .   | 393        |
| 5.4.1    | Polynominterpolation . . . . .  | 393        |
| 5.4.2    | Splineinterpolation . . . . .   | 410        |
| 5.5      | Fourierreihen . . . . .   | 419        |
| 5.5.1    | Periodische Funktionen . . . . .  | 419        |
| 5.5.2    | Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten . . . . .                                    | 420        |
| 5.5.3    | Beispiele für Fourierreihen . . . . .   | 422        |
| 5.5.4    | Konvergenz von Fourierreihen . . . . .  | 430        |
| 5.5.5    | Komplexe Schreibweise von Fourierreihen . . . . .   | 435        |
| 5.5.6    | Anwendung: Gedämpfte erzwungene Schwingung . . . . .  | 438        |
| <b>6</b> | <b>Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler</b>                                      | <b>443</b> |
| 6.1      | Der $n$ -dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$ . . . . .   | 443        |
| 6.1.1    | Spaltenvektoren . . . . .   | 443        |
| 6.1.2    | Arithmetik im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 444        |
| 6.1.3    | Folgen und Reihen von Vektoren . . . . .  | 450        |
| 6.1.4    | Topologische Begriffe . . . . .   | 452        |
| 6.1.5    | Matrizen . . . . .  | 455        |
| 6.2      | Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .   | 459        |
| 6.2.1    | Abbildungen aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ . . . . .                                  | 459        |
| 6.2.2    | Funktionen zweier reeller Variabler . . . . .   | 460        |
| 6.2.3    | Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 466        |
| 6.3      | Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen . . . . .                               | 468        |
| 6.3.1    | Partielle Ableitungen . . . . .   | 468        |
| 6.3.2    | Ableitungsmatrix, Differenzierbarkeit, Tangentialebene . . . . .                            | 472        |
| 6.3.3    | Regeln für differenzierbare Abbildungen. Richtungsableitung . . . . .                       | 478        |

|                             |   |            |
|-----------------------------|---|------------|
| 6.3.4                       | Das vollständige Differential . . . . .   | 482        |
| 6.3.5                       | Höhere partielle Ableitungen . . . . .  | 486        |
| 6.3.6                       | Taylorformel und Mittelwertsatz . . . . .   | 488        |
| 6.4                         | Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen . . . . .                        | 491        |
| 6.4.1                       | Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                      | 491        |
| 6.4.2                       | Satz über implizite Funktionen, Invertierungssatz . . . . .                       | 496        |
| 6.4.3                       | Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen . . . . .                                  | 501        |
| 6.4.4                       | Extremalprobleme mit Nebenbedingungen . . . . .                                   | 504        |
| <b>7</b>                    | <b>Integralrechnung mehrerer reeller Variabler</b>                                | <b>511</b> |
| 7.1                         | Integration bei zwei Variablen . . . . .  | 511        |
| 7.1.1                       | Anschauliche Einführung des Integrals zweier reeller Variabler . . . . .          | 511        |
| 7.1.2                       | Analytische Einführung des Integrals zweier reeller Variabler . . . . .           | 521        |
| 7.1.3                       | Grundlegende Sätze . . . . .  | 525        |
| 7.1.4                       | Riemannsche Summen . . . . .  | 531        |
| 7.1.5                       | Anwendungen . . . . .   | 533        |
| 7.1.6                       | Krummlinige Koordinaten, Transformationen, Funktionaldeterminanten . . . . .      | 540        |
| 7.1.7                       | Transformationsformel für Bereichsintegrale . . . . .                             | 545        |
| 7.2                         | Allgemeinfall: Integration bei mehreren Variablen . . . . .                       | 551        |
| 7.2.1                       | Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                 | 551        |
| 7.2.2                       | Grundlegende Sätze . . . . .  | 554        |
| 7.2.3                       | Krummlinige Koordinaten, Funktionaldeterminante, Transformationsformeln . . . . . | 556        |
| 7.2.4                       | Rauminhalte . . . . .   | 562        |
| 7.2.5                       | Rotationskörper . . . . .   | 565        |
| 7.2.6                       | Anwendungen: Schwerpunkte, Trägheitsmomente . . . . .                             | 568        |
| 7.3                         | Parameterabhängige Integrale . . . . .  | 576        |
| 7.3.1                       | Stetigkeit und Integrierbarkeit parameterabhängiger Integrale . . . . .           | 576        |
| 7.3.2                       | Differentiation eines parameterabhängigen Integrals . . . . .                     | 577        |
| 7.3.3                       | Differentiation bei variablen Integrationsgrenzen . . . . .                       | 578        |
| <b>Anhang</b>               |   | <b>581</b> |
| <b>A</b>                    | <b>Lösungen zu den Übungen</b>  | <b>583</b> |
| <b>Symbole</b>              |   | <b>589</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b> |   | <b>591</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b> |   | <b>595</b> |