

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziel dieses Buches	2
1.2	Historisches zur Lehre von Mathematik	2
1.3	Vorgehen in diesem Buch	3
1.4	Die Kapitel	4
1.5	Einige Bemerkungen	8
2	Kryptografie	11
2.1	Die alte und die neue Kryptografie	12
2.1.1	Alphabetische Verschlüsselung	12
2.1.2	Verschlüsseln mit dem One-Time-Pad	15
2.2	Primzahlen	16
2.2.1	Faktorensuchen ist schwer	17
2.2.2	Die Menge der Primzahlen	18
2.3	Restklassen modulo n	19
2.3.1	Vorschau auf die kryptografischen Rechnungen	20
2.3.2	Der Modul der Restklassen modulo n	21
2.3.3	Allgemeines Rechnen modulo n	22
2.3.4	Multiplizieren modulo n	24
2.3.5	Potenzieren modulo n	26
2.3.6	Inversenbestimmung modulo n	30
2.4	Euklidischer Algorithmus und der ggT	31
2.4.1	Inversenbestimmung mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus	33
2.5	Kryptografische Verfahren	34
2.5.1	Diffie-Hellman-Schlüsselvereinbarung	35
2.5.2	RSA-Verschlüsselung	37
2.5.3	Digitale Signatur	42
2.5.4	Zertifizierung der öffentlichen Schlüssel	43
2.6	Rückblick auf die moderne Kryptografie	45
3	Codierung	47
3.1	Europäische Artikelnummer: EAN	47
3.1.1	Prüfung der EAN und Berechnung der Prüfziffer	48
3.1.2	Aufbau des Strichcodes	50
3.2	Buchnummern ISBN-10 und ISBN-13	51
3.2.1	Eigenschaften und Prüfung der alten ISBN-10	52
3.2.2	Vor- und Nachteile der neuen ISBN-13	53
3.3	IBAN, die internationale Bankkontonummer	54
3.3.1	Aufbau der IBAN	54
3.3.2	Bestimmung der IBAN-Prüfzahl	55

3.4	Codierung mit 0 und 1 ist überall	56
3.4.1	Fehlerkorrigierende Codes	57
3.5	QR-Code, das gescheckte Quadrat	60
3.5.1	Aufbau des QR-Codes	60
3.5.2	Für Sie erfunden: Zwerg-QR-Code	61
3.6	Rückblick auf die Codierung	63
4	Graphentheorie und Knotentheorie	65
4.1	Allerlei Graphen	65
4.1.1	Euler, Königsberg und Graphen	66
4.1.2	Beschreibung von Graphen	70
4.2	Aufspannende Bäume	72
4.2.1	Minimale Spannbäume	73
4.2.2	Spannbäume in ungewichteten Graphen	74
4.3	Kürzeste Wege	76
4.3.1	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen	77
4.3.2	Dijkstra-Algorithmus	78
4.4	Färbungen	81
4.4.1	Konfliktgraphen	81
4.4.2	Landkartenfärbung	83
4.5	Knotentheorie	84
4.5.1	Definitionen der Knotentheorie	85
4.5.2	Aufgabe der Knotentheorie	87
4.5.3	Primknoten strukturieren die Knotentheorie	88
4.5.4	Dreifärbbarkeit als Knoteninvariante	89
4.5.5	Die p -Etikettierbarkeit als Knoteninvariante	92
4.5.6	Das Alexander-Polynom als Knoteninvariante	95
4.5.7	Verschlingungen und Zöpfe	97
4.6	Keltische Knoten	99
4.6.1	Erkunden keltischer Knoten	99
4.6.2	Erfinden keltischer Knoten	101
4.6.3	Ornamente mit keltischen Knoten	103
4.7	Graphen- und Knotentheorie: Rückblick und Ausblick	105
5	Fraktale, Chaos, Ordnung	107
5.1	Idee von Rekursion und Iteration	109
5.1.1	Spinnwebdarstellung rekursiver Folgen	110
5.1.2	Wachstumsvorgänge	112
5.1.3	Feigenbaumdiagramm	114
5.2	Fraktale und Dimension	117
5.2.1	Wegfraktale, Lindenmayer-Systeme	117
5.2.2	Selbstähnlichkeit und Dimension	121
5.2.3	Iterierte-Funktionen-Systeme (IFS)	123
5.3	Mandelbrot- und Julia-Mengen	128
5.3.1	Das echte Apfelmännchen	128
5.3.2	Julia-Mengen	133

5.4	Muster der Natur	136
5.4.1	Zelluläre Automaten	136
5.4.2	Spiralen mit goldenem Winkel	139
5.4.3	Spiralen mit Fibonacci-Zahlen	142
6	Welt der Funktionen	145
6.1	Funktionenfamilien	148
6.1.1	Parabeln und elementare Variationen	148
6.1.2	Geraden und Potenzfunktionen	155
6.1.3	Polynome in ihrer Vielfalt	158
6.1.4	Sinus, Kosinus und Musik	171
6.1.5	Exponentialfunktionen	176
6.1.6	Umkehrfunktionen	177
6.2	Funktionenbauhof	180
6.2.1	Summe von Funktionen	181
6.2.2	Produkt von Funktionen	182
6.2.3	Verkettung von Funktionen	183
6.2.4	Kehrwertbildung von Funktionen	185
6.2.5	Quotienten von Funktionen	186
6.2.6	Quotienten von Polynomen	188
6.3	Blick auf den Punkt: Ableitung	192
6.3.1	Ableitungsfunktion	194
6.3.2	Die e-Funktion, das Geheimnis wird gelüftet	198
6.4	Blick auf das Ganze: das Integral	200
6.4.1	Definition des Integrals	203
6.4.2	Weitere Anwendungen des Integrals	205
6.5	Großartiger Zusammenhang	207
6.5.1	Teppich abrollen mit der Integralfunktion	208
6.6	Funktionen in höheren Räumen	212
6.6.1	Funktionen im 3D-Raum	212
6.6.2	Mathematische 3D-Lösungen im Bauwesen	216
6.6.3	Noch höher hinaus	218
7	Optimierung als Ziel	221
7.1	Extremwertaufgaben	221
7.2	Gewinnoptimierung	224
7.3	Lineare Optimierung	224
7.4	Minimalflächen	226
7.5	Methode der kleinsten Quadrate	228
7.6	Optimierung ist überall	230
8	Computer und Mathematik	231
8.1	Binärsystem	232
8.1.1	Zahlenhellseher	234
8.1.2	Plus und Mal mit Binärzahlen	235

8.1.3	Subtraktion mit Trick	235
8.1.4	Binäre Kommazahlen	236
8.2	Zahldarstellung im Computer	237
8.2.1	Experimente mit Kommazahlen in Computern	238
8.2.2	Maschinengenauigkeit	239
8.2.3	Binäre Gleitkommazahlen in Computern	240
8.3	Numerisch arbeitende Werkzeuge	241
8.3.1	Software für numerische Aufgaben	242
8.3.2	Numerik ist überall	242
8.3.3	Tabellenkalkulationen	242
8.4	Dynamische Mathematik	243
8.4.1	Dynamische-Geometrie-Systeme (DGS)	244
8.4.2	Dynamische-3D-Geometrie	245
8.4.3	Vom Taschenrechner zum Handheld-Computer	246
8.5	Computer-Algebra-Systeme (CAS)	247
8.5.1	Die Mächtigkeit der CAS	249
8.5.2	Computer in nicht-numerischen Anwendungen	249
8.6	Berechenbarkeit	250
8.6.1	Berechenbar, aber nicht effektiv berechenbar	251
8.6.2	Komplexität von Programmen	251
8.6.3	Die Klasse der NP-vollständigen Probleme	252
8.6.4	Nutzen der Computerbeschränkungen	254
8.7	Computer in unserer Welt	254
9	Numerik	255
9.1	Numerische Verfahren der Analysis	255
9.1.1	Heron-Verfahren für Wurzeln	255
9.1.2	Nullstellensuche	257
9.1.3	Numerische Integration	260
9.2	Für alle Fälle: Polynome	264
9.2.1	Ein Taylor schneidert Polynomkleider, die fast passen	264
9.2.2	Zwischenwerte: Interpolation mit Polynomen	266
9.2.3	Splines: damit es in der richtigen Weise krumm wird	267
9.2.4	Bézier-Splines: frei gestaltete Formen	268
9.3	Fourier-Reihen	270
9.3.1	Klangfarben	271
9.3.2	Aufstellen der Fourier-Reihe für periodische Funktionen	272
9.4	Differenzialgleichungen	274
9.5	Ohne Numerik geht es nicht	275
10	Stochastik	277
10.1	Beschreibende Statistik	277
10.1.1	Fehler in der beschreibenden Statistik	277
10.1.2	Regression	279

10.2	Wahrscheinlichkeitstheorie	279
10.2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	279
10.2.2	Axiome von Kolmogorow	282
10.2.3	Mehrstufige Zufallsversuche	284
10.2.4	Simulation der Gleichverteilung	286
10.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Verteilung	287
10.3.1	Krüge für den Handwerkermarkt	287
10.3.2	Kombinatorik	289
10.4	Verteilungen	292
10.4.1	Binomialverteilung	292
10.4.2	Simulation von Bernoulli-Ketten	297
10.4.3	Simulation der Binomialverteilung und Beispiele	299
10.4.4	Kumulierte Verteilungsfunktionen	301
10.4.5	Normalverteilung	302
10.5	Beurteilende Statistik	309
10.6	Beurteilende Statistik: Schätzen	310
10.6.1	Intervallschätzung im binomialen Fall	310
10.6.2	Intervallschätzung im normalverteilten Fall	312
10.7	Beurteilende Statistik: Testen	312
10.7.1	Hypothesentest im binomialen Fall	313
10.7.2	Allgemeine Vorgehensweise beim Signifikanztest	316
10.7.3	Deutung der Unsicherheit beim Signifikanztest	319
10.7.4	Hypothesentest mit den z -sigma-Grenzen	319
10.7.5	Trennschärfe eines Tests	320
10.7.6	Hypothesentest bei Messreihen	321
10.8	Stochastische Prozesse	322
10.8.1	Markow-Ketten	322
10.8.2	Warteschlangen	328
10.9	Stochastik im Rückblick	334
11	Geometrie	335
11.1	Der goldene Schnitt	336
11.1.1	Interaktive Erkundung des goldenen Schnittes	339
11.2	Die Kegelschnitte	341
11.2.1	Namensgeheimnis der Kegelschnitte	342
11.3	Reflexion bei Parabeln	345
11.3.1	Konstruktion der Reflexion	346
11.3.2	Anwendungen der Parabelreflexion	346
11.3.3	Die Parabel und ihre Leitgerade	347
11.4	Reflexion bei Ellipsen und Hyperbeln	349
11.4.1	Anwendungen der Ellipsenreflexion	350
11.4.2	Ellipse, Hyperbel und ihr gemeinsamer Leitkreis	351
11.4.3	Fadenkonstruktionen von Ellipse und Hyperbel	353
11.5	Kaustiken und Katakaustiken	354
11.6	Geometrie im Rückblick	355

12 Selbstverständnis der Mathematik	357
12.1 Mathematiker und Mathematikerinnen	357
12.2 Algebra und Zahlaufbau	359
12.2.1 Natürliche und ganze Zahlen	359
12.2.2 Rationale und reelle Zahlen	360
12.2.3 Komplexe Zahlen	361
12.3 Mathematische Schönheit	363
12.4 Beweisen	365
12.4.1 Ein Beweis in der Geometrie	365
12.4.2 Ein Beweis in der Analysis	367
12.5 Die unlösbaren Probleme der Antike	370
12.6 Fazit	372
13 Lösungen	373
Literaturverzeichnis	383
Sachverzeichnis	396