

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Numerische Methoden im Ingenieurwesen	1
1.2	Ursprünge der numerischen Verfahren bis zur FEM	4
1.3	Grundidee der Finiten Elemente und der Aufbau dieses Buches	9
Literatur		10
2	Physikalische Grundlage der FEM	13
2.1	Extremwertprinzipien in der Physik	13
2.2	Potentielle Energie elastischer Festkörper	21
2.2.1	Äußere und innere Arbeit bei Stäben und Balken	22
2.2.2	Äußere und innere Arbeit bei mechanischen Kontinua	25
2.2.3	Gesamtarbeit und gesamte potentielle Energie	26
2.3	Zusammenfassung	27
Literatur		28
3	Mathematische Grundlagen der FEM	31
3.1	Variationsrechnung – Einführung in Analogie zur Differentialrechnung	31
3.1.1	Differentialrechnung	32
3.1.2	Variationsrechnung	33
3.1.3	Starke und schwache Form	50
3.1.4	Variationsrechnung mit Nebenbedingungen	50
3.1.5	Zusammenfassung	53
3.2	Herleitung der schwachen Form mit dem Verfahren von GALERKIN	54
3.2.1	Verfahren von GALERKIN als Umkehrung der Bestimmung der EULER'schen Differentialgleichung des Variationsproblems	54
3.2.2	Verfahren von GALERKIN als Funktionenskalarprodukt	55
3.3	Verfahren von RITZ	56
3.3.1	Verfahren von Trefftz	57
3.4	Fehler in der Approximation und <i>Variational Crimes</i>	58
3.5	Zusammenfassung	58
3.6	Übungsaufgaben	60
Literatur		77

4	Ansatzfunktionen	79
4.1	Was sind Ansatzfunktionen?	79
4.2	Lokale und globale Ansatzfunktionen	80
4.2.1	Globale Ansatzfunktionen	80
4.2.2	Lokale Ansatzfunktionen	81
4.2.3	Bedingungen an die lokalen Ansatzfunktionen	83
4.3	Ansatzfunktionen für eindimensionale Gebiete	86
4.3.1	Ansätze nach LAGRANGE	87
4.3.2	BERNSTEIN-Polynome als Ansatzfunktionen	93
4.3.3	Splines und NURBS als Ansatzfunktionen	94
4.3.4	Hierarchische Ansatzfunktionen	95
4.4	Ansatzfunktionen für mehrdimensionale Gebiete	96
4.4.1	Ansatzfunktionen für Rechtecke und Quader	97
4.4.2	Ansatzfunktionen für Dreiecke	98
4.5	Ansatzfunktionen für Übergangselemente	107
4.5.1	Allgemeines Vorgehen zum Einfügen zusätzlicher Knoten	108
4.6	Serendipity-Elemente	113
4.7	Inkompatible Ansatzfunktionen	115
4.8	Zusammenfassung	116
4.9	Übungsaufgaben	120
	Literatur	123
5	Finite-Elemente-Formulierung	125
5.1	Approximation der Feldfunktion mit Ansatzfunktionen	125
5.1.1	Approximation skalarer Feldfunktionen	125
5.1.2	Approximation vektorwertiger Feldfunktionen	127
5.2	Verwendung von Ansatzfunktionen zur Erstellung von Finiten Elementen	129
5.2.1	Skalare Feldgrößen und vektorwertige abgeleitete Größen	129
5.2.2	Vektorielle Feldgrößen und tensorwertige abgeleitete Größen	131
5.3	Lösung der Finite-Elemente-Gleichung	133
5.3.1	Assemblierung mehrerer Finiter Elemente	133
5.3.2	Natürliche Randbedingungen und kinematisch konsistente Lasten	135
5.3.3	Einfügen von wesentlichen Randbedingungen (Lagern) für die Feldfunktion	136
5.3.4	Transformation von Freiwerten	138
5.3.5	Bestimmung der Freiwerte der Feldfunktion	140
5.3.6	Berechnung der Lagerreaktionen	141
5.4	Zusammenfassung	141
5.5	Übungsaufgaben	142
	Literatur	153

6	Isoparametrisches Konzept	155
6.1	Grundidee des isoparametrischen Konzepts	155
6.2	Isoparametrische Koordinatentransformation	156
6.3	Transformation der Ableitungen	160
6.3.1	JACOBI-Matrix	161
6.3.2	Transformation des Gradienten der Verschiebungsmodalmatrix bei skalaren Feldfunktionen	163
6.3.3	Transformation der Dehnungs-Verschiebungs-Matrix	163
6.3.4	Transformation höherer Ableitungen	164
6.4	Transformation der Integrale	165
6.4.1	Gebietsintegrale	165
6.4.2	Oberflächenintegrale	167
6.5	Lineare und nichtlineare isoparametrische Transformation	169
6.5.1	Lineare Transformation	169
6.5.2	Nichtlineare Transformation	171
6.6	Subparametrische und superparametrische Transformation	173
6.7	Kuriositäten	173
6.7.1	Dreieckselemente als kollabierte Viereckelemente	174
6.7.2	Riss spitzenelemente	176
6.8	Zusammenfassung	178
6.9	Übungsaufgaben	179
	Literatur	201
7	Numerische Integration	203
7.1	GAUSS-LEGENDRE-Quadratur über rechtwinklige Gebiete	204
7.2	Integration über dreieckige und tetraederförmige Gebiete	208
7.3	Übungsaufgaben	213
	Literatur	220
8	Nachlaufrechnung	221
8.1	Berechnung der abgeleiteten Größen an optimalen Punkten	222
8.1.1	Optimale Punkte bei verzerrten Elementen	226
8.2	Spannungsermittlung an den Knotenpunkten	227
8.3	Zusammenfassung	231
8.4	Übungsaufgaben	231
	Literatur	232
9	Elementanalyse	233
9.1	Polynomgrade der Feldfunktionen verzerrter Elemente	233
9.2	Eigenmoden der Elementsteifigkeiten	237

9.3	Locking und Hourgassing	238
9.3.1	Shearlocking und volumetrisches Locking	238
9.3.2	(Selektiv-)reduzierte Integration und der Hourglass-Effekt	240
9.3.3	Dreiecks- und Tetraederelemente mit linearem Ansatz	241
9.4	Patchtest nach IRONS	242
9.5	Übungsaufgaben	243
	Literatur	248
10	Anwendungsbeispiele und praktische Elementeigenschaften	249
10.1	Eigenschaften der unterschiedlichen Ansatzfunktionen	249
10.2	Verzerrte LAGRANGE- und Serendipity-Elemente	255
10.3	Patchtest – Kompatible und inkompatible Ansätze	258
10.4	Nachlaufgrößen, Fehler und hierarchische Verfeinerung einer Balkenstruktur	260
10.5	Dos and Don'ts	264
	Literatur	265
A	VOIGT'sche Notation in der Mechanik	267
B	Hilfsmittel für die FE	271
C	Herleitungen	275
	Sachverzeichnis	277